

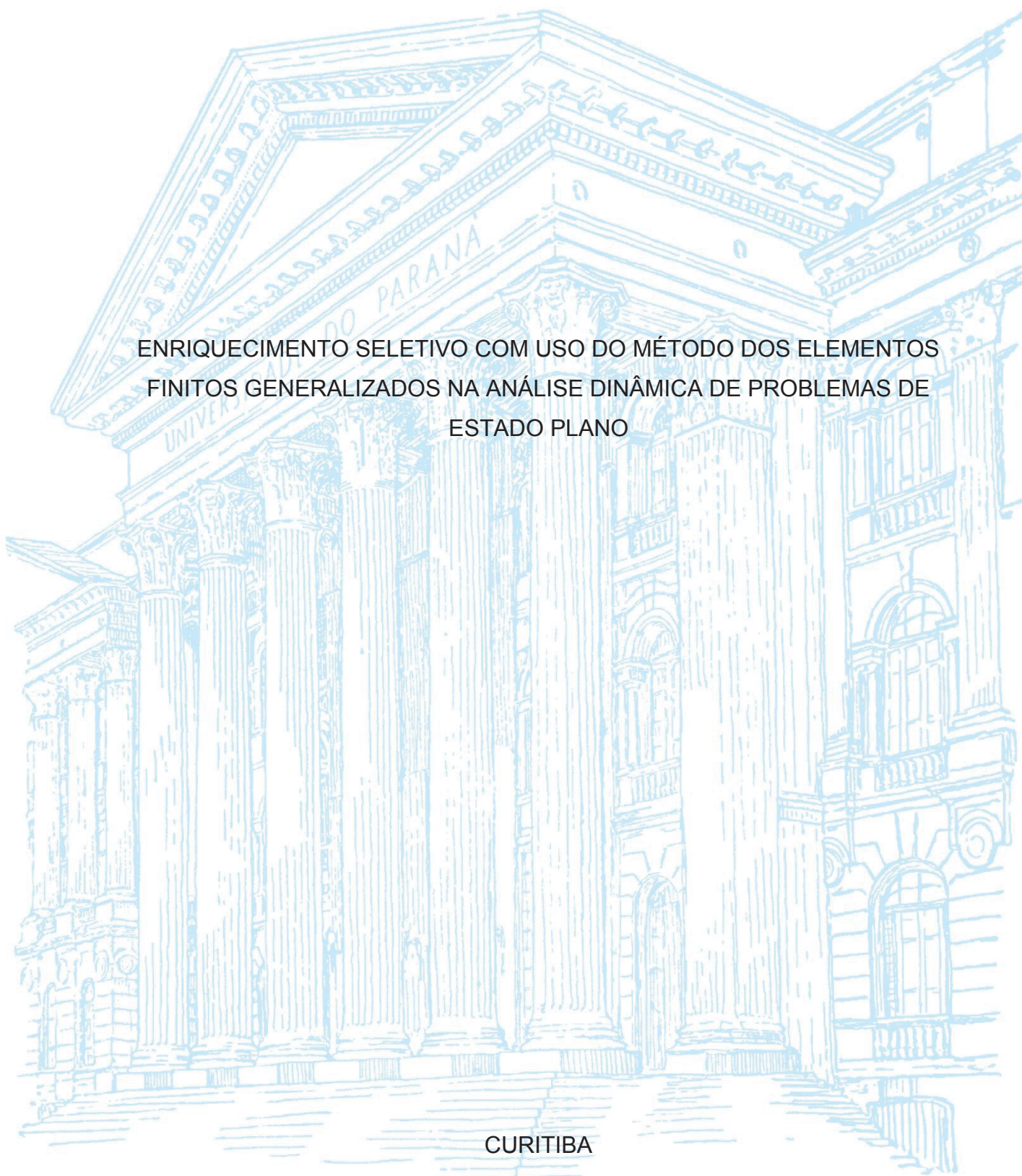
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CAROLINA CASTRO CITTADIN

ENRIQUECIMENTO SELETIVO COM USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS GENERALIZADOS NA ANÁLISE DINÂMICA DE PROBLEMAS DE  
ESTADO PLANO

CURITIBA

2020



CAROLINA CASTRO CITTADIN

ENRIQUECIMENTO SELETIVO COM USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS GENERALIZADOS NA ANÁLISE DINÂMICA DE PROBLEMAS DE  
ESTADO PLANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia da Construção Civil.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Arndt

CURITIBA

2020

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

C581e

Cittadin, Carolina Castro

Enriquecimento seletivo com uso do método dos elementos finitos generalizados na análise dinâmica de problemas de estado plano [recurso eletrônico] / Carolina Castro Cittadin. – Curitiba, 2020.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Construção Civil, 2020.

Orientador: Marcos Arndt .

1. Dinâmica estrutural. 2. Método dos elementos finitos. 3. Enriquecimento seletivo. I. Universidade Federal do Paraná. II. Arndt, Marcos. III. Título.

CDD: 621.171063

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE CONSTRUÇÃO CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **CAROLINA CASTRO CITTADIN** intitulada: **ENRIQUECIMENTO SELETIVO COM USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS NA ANÁLISE DINÂMICA DE PROBLEMAS DE ESTADO PLANO**, sob orientação do Prof. Dr. MARCOS ARNDT, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 13 de Abril de 2020.



MARCOS ARNDT

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



FELICIO BRUZZI BARROS

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS)



JOÃO ELIAS ABDALLA FILHO

Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)

## AGRADECIMENTOS

Ser um bom orientador é entender que cada aluno é diferente e tem seu tempo. É saber ensinar e ao mesmo tempo se adaptar. Ser empático e apoiar seu aluno é para os especiais. Aprendi isso e muito mais com o professor Marcos Arndt. Cada momento que o Sr. separou para perguntar se eu estava bem foi igualmente valioso aos que reservou para me ajudar no desenvolvimento desse trabalho. Obrigada por ter aceitado me orientar e não ter desistido de mim no caminho. Foram os momentos em que o Sr. acreditou em mim mesmo quando eu não acreditei que me permitiram chegar aqui. Saiba que sua maior contribuição na vida de seus alunos é a de como ser uma pessoa boa. Tenho certeza que dentre os que convivem com o Sr. surgirão muitos professores excepcionais no futuro.

Alice e Sophia, vocês me acharem a pessoa mais incrível do mundo é muitas vezes assustador, mas acima de tudo é minha maior motivação. Ser um bom exemplo para vocês sempre foi e sempre será meu maior objetivo. Acho que em parte deve estar funcionando porque vocês são de longe as meninas mais lindas, inteligentes e especiais que conheço. Nunca duvidem do potencial que possuem e se duvidarem lembrem do que o mochi mais lindo do mundo diz “You nice, keep going”. Ps: I love you two (I know you guys got the double meaning).

Aos meus pais agradeço pela paciência e peço que tenham mais um pouco. Sei que lidar com uma jovem adulta que não sabe para onde ir não é fácil. Ainda mais quando ela é um pouco muito dramática. O apoio e o amor constante de vocês me motivam a não desistir mesmo quando tudo parece muito difícil. Obrigada por acreditarem no meu potencial de adulta sem nunca esquecerem de me dar o mesmo carinho de quando eu era uma criança.

Por fim, agradeço aos meus amigos que mais do que nunca tiveram que me ouvir falar. Seja por mensagem, áudios gigantes ou encontros vocês sobreviveram ao meu período Carol reclamação nível máximo. Prometo que daqui em diante vai ser mais fácil. Amo vocês. Agradecimento especial o Grupo do Amor (antigo grupo seletivo) que sempre faz eu me sentir parte de uma família.

## RESUMO

A crescente busca por projetos otimizados tem levado a adoção de estruturas mais leves e esbeltas e, portanto, mais suscetíveis a efeitos dinâmicos. Como consequência, pesquisadores buscam soluções cada vez mais precisas para tais análises. Nesse contexto, surgem métodos como o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) que vem sendo aplicado com bastante sucesso. Apesar de tal método aumentar a acurácia das soluções obtidas, muitas vezes leva a um aumento da complexidade da formulação e pode exigir grandes custos computacionais. Para equilibrar tais desvantagens o método pode ser combinado com indicadores de erro para que o enriquecimento seja aplicado seletivamente aos elementos com maior impacto na resposta modal. Tal estratégia pode, além disso, ser combinada com técnicas de condensação modal que eliminam modos com más aproximações em análises transientes. Sendo assim, o presente trabalho analisa a aplicabilidade do indicador de Friberg como guia para enriquecimentos seletivos e a condensação das matrizes modais de problemas transientes através do uso do fator de influência dos modos de vibração. Foram desenvolvidos exemplos de estado plano de tensões e deformações e as respostas obtidas foram comparadas com resultados apresentados previamente na literatura e/ou soluções de referência obtidas pelo Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) com alto nível de refinamento. Na análise modal observou-se que em média 85% do efeito da aplicação do MEFG a todos os elementos pode ser obtido com enriquecimento de aproximadamente 50% dos graus de liberdade. Já na análise transiente conclui-se que, especialmente em relação a deslocamentos, a condensação das matrizes modais para conter somente os modos mais influentes leva a resultados muito próximos aos obtidos pelo uso das matrizes completas. Todas as análises levaram a ganhos no tempo computacional em relação ao MEFG convencional.

**Palavras-chave:** Análise Dinâmica Bidimensional. Método dos Elementos Finitos Generalizados. Enriquecimento Seletivo.



## ABSTRACT

The increasing search for optimized projects has led to the design of slender and lighter structures, which are more susceptible to dynamic effects. As a consequence, researchers constantly focus on obtaining more precise solutions. In this context methods such as the Generalized Finite Element Method (GFEM) have been applied with great success. Even though such method, in general, improves the accuracy of solutions it can lead to greater computational efforts and problem complexity. A way to balance these drawbacks is to combine it with error indicators. These allow the engineer to specify which mesh elements have greater influence on the results and apply refinements selectively to such elements. Furthermore, such technique, in transient analysis, can be combined with modal matrix condensation. Therefore, this work explores the applicability of the Friberg indicator as a guide to selective mesh enrichments and the use of the factor of influence of each vibration mode as a criterion for modal matrix condensation. Plane stress and plane strain examples were analyzed and the results were compared with others presented in previous literature and/or with those obtained through the Hierarchical Finite Element Method (HFEM) with high levels of refinement. The modal analysis results show that, with selective enrichments, an average of 85% of the GFEM improvement can be obtained with an average of only 50% of the degrees of freedom originally required. As for the transient analysis, especially in regards to displacements, it is shown that reducing the modal matrices to contain only the most influent modes leads to results that are very similar to those obtained through the use of the complete matrices. All analysis presented lead to improvements in computational running times when compared to traditional GFEM.

**Keywords:** Two-dimensional Dynamic Analysis. Generalized Finite Element Method. Selective Enrichment.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sistema de um grau de liberdade .....	40
Figura 2 - Sistema com múltiplos graus de liberdade.....	41
Figura 3 - Corpo submetido à atuação de forças .....	43
Figura 4 - Estado de tensões em um ponto.....	44
Figura 5 - Estado plano de tensões.....	45
Figura 6 - Estado plano de deformações .....	47
Figura 7 - Deformação de um elemento infinitesimal .....	48
Figura 8 - Equilíbrio de elemento bidimensional infinitesimal.....	50
Figura 9 - Método da Superposição Modal .....	59
Figura 10 - Coordenadas generalizadas de deslocamento .....	61
Figura 11 - Cálculo do fator de influência para o 1° modo .....	62
Figura 12 - Elemento retangular de quatro nós.....	64
Figura 13 - Funções de forma elemento retangular .....	66
Figura 14 - Refino hierárquico .....	68
Figura 15 - Elemento normalizado .....	69
Figura 16 - Polinômios de Lobatto.....	71
Figura 17 - Tipos de função de aproximação .....	71
Figura 18 - Conformidade de elementos adjacentes.....	72
Figura 19 - Elemento não uniforme .....	73
Figura 20 - Aproximação local através de subcoberturas $\Omega_i$ .....	75
Figura 21 - Partição da Unidade Lagrangeana.....	78
Figura 22 - Construção função de forma enriquecida .....	80
Figura 23 - Funções enriquecidas com $\beta = \pi$ .....	83
Figura 24 - Funções enriquecidas com $\beta = 5\pi/2$ .....	83



Figura 25 - Funções de enriquecimento bidimensionais do MEFG com $\beta = \pi$ .....	84
Figura 26 - Exemplo chapa quadrada .....	90
Figura 27 - Chapa quadrada: malha 2x2 .....	91
Figura 28 - Chapa quadrada: malha 3x3 .....	93
Figura 29 - Propostas de enriquecimento .....	100
Figura 30 - (a) Malha distorcida (b) Malha severamente distorcida.....	103
Figura 31 - (a) Chapa analisada (b) Malha adotada .....	112
Figura 32 - Chapa: Sequência de enriquecimento 1ª frequência .....	113
Figura 33 - Chapa: Relação soma de Friberg com CA 1ª frequência.....	115
Figura 34 - Chapa: Relação do número de graus de liberdade com a CA 1ª frequência.....	115
Figura 35 - Chapa: Relação número de graus de liberdade com o número de condição 1ª frequência .....	116
Figura 36 - Detalhamento taxa da CA .....	117
Figura 37 - Chapa: 1º modo de vibração natural.....	119
Figura 38 - Chapa: Sequência de enriquecimento 3ª frequência .....	120
Figura 39 - Chapa: Relação soma de Friberg com CA 3ª frequência.....	121
Figura 40 - Chapa: Relação do número de graus de liberdade com a CA 3ª frequência.....	122
Figura 41 - Chapa: Relação número de graus de liberdade com o número de condição 3ª frequência .....	122
Figura 42 - Chapa: 3º modo de vibração natural.....	124
Figura 43 - Barragem de terra .....	125
Figura 44 - Barragem: malha 3 elementos .....	125
Figura 45 - Barragem: malha 35 elementos .....	127
Figura 46 - Barragem: Sequência de enriquecimento 1ª frequência .....	128
Figura 47 - Barragem: Relação soma de Friberg com CA 1ª frequência.....	130

Figura 48 - Barragem: Relação número de graus de liberdade com CA 1ª frequência .....	130
Figura 49 - Barragem: Relação número de graus de liberdade com número de condição 1ª frequência .....	131
Figura 50 - Barragem: 1º modo de vibração natural.....	132
Figura 51 - Barragem: Sequência de enriquecimento 4ª frequência .....	133
Figura 52 - Barragem: Relação soma de Friberg com CA 4ª frequência.....	135
Figura 53 - Barragem: Relação número de graus de liberdade com CA 4ª frequência .....	135
Figura 54 - Barragem: Relação número de graus de liberdade com número de condição 4ª frequência .....	136
Figura 55 - Barragem: 4º modo natural de vibração.....	137
Figura 56- Chapa com furo circular .....	138
Figura 57 - Chapa com furo: Malha 32 e 48 elementos .....	139
Figura 58 - Chapa com furo: Malha 32 elementos .....	141
Figura 59 - Chapa com furo: Sequência de enriquecimento 1ª frequência .....	142
Figura 60 - Chapa com furo: Relação soma de Friberg com CA 1ª frequência.....	144
Figura 61 - Chapa com furo: Relação número de graus de liberdade com CA 1ª frequência.....	144
Figura 62 - Chapa com furo: Relação número de graus de liberdade com número de condição 1ª frequência .....	145
Figura 63 - Chapa com furo: 1º modo natural de vibração.....	146
Figura 64 - Chapa com furo: Sequência de enriquecimento 5ª frequência .....	147
Figura 65 - Chapa com furo: Relação soma de Friberg com CA 5ª frequência.....	149
Figura 66 - Chapa com furo: Relação número de graus de liberdade com CA 5ª frequência.....	149
Figura 67 - Chapa com furo: Relação número de graus de liberdade com número de condição 5ª frequência .....	150

Figura 68 - Chapa com furo: 5° modo natural de vibração.....	151
Figura 69 - Estrutura sujeita a carregamento harmônico .....	153
Figura 70 - Carregamento harmônico: Fator de influência .....	154
Figura 71 - Carregamento harmônico – Linha de corte do Fator de influência .....	154
Figura 72 - Carregamento harmônico: Deslocamento.....	156
Figura 73 - Carregamento harmônico: Velocidade.....	156
Figura 74 - Carregamento harmônico: Aceleração.....	157
Figura 75 - Chapa com carregamento de impacto .....	159
Figura 76 - Carregamento impacto: Fator de influência .....	160
Figura 77 - Carregamento impacto: Deslocamento.....	162
Figura 78 - Carregamento impacto: Velocidade .....	162
Figura 79 - Carregamento impacto: Aceleração.....	163
Figura 80 - Carregamento impacto: Deslocamento com MEFG e MEFH reduzidos p/ 50% .....	164
Figura 81 - Carregamento impacto: Velocidade com MEFG e MEFH reduzidos p/ 50% .....	165
Figura 82 - Carregamento impacto: Aceleração com MEFG e MEFH reduzidos p/ 50% .....	165
Figura 83 - Carregamento impacto: Fator de influência p/ $t_f = 0,001s$ .....	167
Figura 84 - Carregamento impacto: Deslocamento p/ $t_f = 0,001 s$ .....	167
Figura 85 - Carregamento impacto: Velocidade p/ $t_f = 0,001 s$ .....	168
Figura 86 - Carregamento impacto: Aceleração p/ $t_f = 0,001 s$ .....	168
Figura 87 - Carregamento impacto: Deslocamento com fator de influência > 97%.170	
Figura 88 - Carregamento impacto: Velocidade com fator de influência > 97%.....	170
Figura 89 - Carregamento impacto: Aceleração com fator de influência > 97%.....	171
Figura 90 - Carregamento de impacto: Fator de influência de velocidades .....	172

Figura 91 - Carregamento impacto: Deslocamentos p/ fator de influência de velocidades .....	173
Figura 92 - Carregamento impacto: Velocidade p/ fator de influência de velocidades .....	174
Figura 93 - Carregamento impacto: Aceleração p/ fator de influência de velocidades .....	174
Figura 94 - Carregamento impacto: Fator de influência de acelerações .....	175
Figura 95 - Carregamento impacto: Deslocamento p/ fator de influência de aceleração.....	176
Figura 96 - Carregamento impacto: Velocidade p/ fator de influência de aceleração .....	176
Figura 97 - Carregamento impacto: Aceleração p/ fator de influência de aceleração .....	177

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Fatores de amortecimento usuais .....	42
Tabela 2 - Malha 2x2: Cálculo do indicador de Friberg por elemento refinado x refino total .....	91
Tabela 3 - Malha 2x2: Cálculo do indicador de Friberg por direção .....	92
Tabela 4 - Malha 3x3: Cálculo por função .....	94
Tabela 5 - Malha 2x2: Acurácia do indicador para a 1ª frequência .....	95
Tabela 6 - Malha 2x2: Acurácia do indicador para a 6ª frequência .....	95
Tabela 7 - Malha 2x2: Acurácia do indicador para a 12ª frequência .....	95
Tabela 8 - Malha 3x3: Acurácia do indicador para a 1ª frequência .....	96
Tabela 9 - Malha 3x3: Acurácia do indicador para a 6ª frequência .....	96
Tabela 10 - Malha 3x3: Acurácia do indicador para a 12ª frequência .....	96
Tabela 11 - Malha 3x3: Acurácia do indicador para a 20ª frequência .....	97
Tabela 12 - Malha 3x3: acurácia de valores negativos .....	98
Tabela 13 - Malha 3x3: Acurácia em MEFG do indicador para a 1ª frequência .....	99
Tabela 14 - Malha 3x3: Acurácia em MEFG do indicador para a 12ª frequência .....	99
Tabela 15 - Resultados propostas de enriquecimento para primeira frequência.....	101
Tabela 16 - Indicadores de diferentes níveis.....	102
Tabela 17 - Indicadores para malhas distorcidas .....	103
Tabela 18 - Malha distorcida (a): acurácia do indicador para a 1ª frequência .....	104
Tabela 19 - Malha severamente distorcida (b): acurácia do indicador para a 6ª frequência.....	104
Tabela 20 - Comparativo de erro (%) com e sem o uso de funções do tipo borda..	105
Tabela 21 - Malha 3x3: Acurácia do indicador na 1ª frequência com o uso de funções bolha e borda .....	106

Tabela 22 - Malha 3x3: Acurácia do indicador na 3ª frequência com o uso de funções bolha e borda .....	107
Tabela 23 - Sequência de enriquecimento 1ª frequência .....	107
Tabela 24 - Sequência de enriquecimento 3ª frequência .....	108
Tabela 25 - Presença de indicadores negativos.....	108
Tabela 26 - Impacto do uso de elementos de transição na sequência de refinamento para a 1ª frequência .....	109
Tabela 27 - Impacto do uso de elementos de transição na 3ª frequência .....	110
Tabela 28 - Frequências naturais (rad/s): chapa quadrada.....	112
Tabela 29 - Chapa: Sequência numérica de enriquecimento para a 1ª frequência.....	113
Tabela 30 - Chapa: Enriquecimento sequencial 1ª frequência .....	114
Tabela 31 - Chapa: Resultado comparativo da 1ª frequência .....	118
Tabela 32 - Chapa: Tempo computacional .....	119
Tabela 33 - Chapa: Sequência numérica de enriquecimento 3ª frequência.....	120
Tabela 34 - Chapa: Enriquecimento sequencial 3ª frequência .....	121
Tabela 35 - Resultado comparativo da 3ª frequência.....	123
Tabela 36 - Chapa: Tempo computacional .....	124
Tabela 37 - Frequências naturais da barragem de terra (rad/s) .....	126
Tabela 38 - Barragem: Indicadores para malha 3 elementos.....	126
Tabela 39 - Barragem: Enriquecimento sequencial 1ª frequência.....	129
Tabela 40 - Barragem: Resultado comparativo 1ª frequência .....	131
Tabela 41 - Barragem: Tempo computacional .....	132
Tabela 42 – Barragem: Enriquecimento sequencial 4ª frequência.....	134
Tabela 43 - Barragem: Resultado comparativo 4ª frequência .....	137
Tabela 44 - Barragem: Tempo computacional .....	138
Tabela 45 - Frequências naturais (rad/s) .....	139

Tabela 46 - Frequências obtidas pelo MEFG com diferentes malhas – Chapa com furo .....	140
Tabela 47 - Chapa com furo: Enriquecimento sequencial 1ª frequência .....	143
Tabela 48 - Chapa com furo: Tempo computacional.....	146
Tabela 49 - Chapa com furo: Enriquecimento sequencial 5ª frequência .....	148
Tabela 50 - Chapa com furo: Tempo computacional.....	151
Tabela 51 - Carregamento harmônico: Sequência de enriquecimento 1ª frequência .....	155
Tabela 52 - Carregamento harmônico: Sequência de enriquecimento 2ª frequência .....	155
Tabela 53 - Carregamento harmônico: Tempo computacional.....	158
Tabela 54 - Carregamento impacto: Elementos enriquecidos.....	161
Tabela 55 - Carregamento impacto: Tempo computacional.....	172
Tabela 56 - Modos utilizados para diferentes coordenadas generalizadas consideradas no fator de influência.....	178



## LISTA DE SIGLAS

- 1D – Unidimensional
- 2D – Bidimensional
- 3D – Tridimensional
- CA – Capacidade de Aproximação;
- MC – Método Composto;
- MEF – Método dos Elementos Finitos;
- MEFH – Método dos Elementos Finitos Hierárquicos;
- MEFG – Método dos Elementos Finitos Generalizados;
- MEFG E – Métodos dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado;
- MEFG R – Método dos Elementos Finitos Generalizados Reduzido;
- MEFG RS – Método dos Elementos Finitos Generalizados Reduzido Seletivo;
- MPU – Método da Partição da Unidade;
- MRP – Método dos Resíduos Ponderados;
- PU – Partição da Unidade.

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Romanas Maiúsculas

$C_\infty, C_G$	Constantes do Método da Partição da Unidade
<b>C</b>	Matriz de amortecimento
<b>D</b>	Matriz de propriedades constitutivas
$E$	Módulo de elasticidade
$F_i$	Fator de influência do modo $i$
$G_{ij}$	Funções de forma enriquecidas
<b>I</b>	Matriz identidade
<b>K</b>	Matriz de rigidez
<b>L</b>	Matriz de operadores diferenciais
$L_i$	Função partição da unidade
<b>M</b>	Matriz de massa
$M$	Subconjunto limitado de um espaço normado $X$
<b>N</b>	Matriz de funções de forma
$N$	Função de forma
<b>P</b>	Vetor de forças
<b>R</b>	Resíduo
$S_i$	Espaço de aproximação local
$S$	Espaço de aproximação global
$S$	Superfície
$V$	Volume

### Romanas Minúsculas

$a_{ij}$	Graus de liberdade associado à função de base $\gamma_{ij}$
$b_{ij}$	Grau de liberdade associado à função de base $\varphi_{ij}$
<b>c</b>	Constante de amortecimento
$c_{crit}$	Constante de amortecimento crítico
<b>f</b>	Vetor de forças

$k$	Constante de Rigidez
$l$	Função de forma unidimensional
$m$	Constante de massa
$n_i$	Indicador de Friberg
$p$	Força aplicada
$\bar{q}$	Vetor de forças atuantes na superfície $S$
$\mathbf{q}$	Vetor de coordenadas generalizadas de deslocamento
$\ddot{\mathbf{q}}$	Vetor de coordenadas generalizadas de aceleração
$s_i^j$	Funções de aproximação local do espaço $S_i$
$t$	Tempo de análise
$u$	Deslocamento na direção horizontal $x$
$u^e$	Deslocamento elementar
$u_{MEF}^e$	Parcela de aproximação proveniente do MEF
$u_{ENR}^e$	Parcela de aproximação proveniente do enriquecimento
$u_h, u_a$	Função que aproxima $u$
$\dot{u}$	Velocidade
$\ddot{u}$	Aceleração
$v$	Deslocamento na direção vertical $y$
$w_i$	Função peso

#### Gregas Maiúsculas

$\Delta t$	Passo de tempo
$\Phi$	Matriz modal
$\Phi_{ij}$	Funções de enriquecimento de base
$\Omega$	Domínio de análise
$\Omega^2$	Matriz espectral
$\Omega_i$	Subcobertura do domínio $\Omega$

## Gregas Minúsculas

$\beta_j$	Parâmetro de enriquecimento
$\gamma$ e $\beta$	Constantes do método de Newmark
$\gamma_{ij}$ e $\varphi_{ij}$	Funções de base
$\gamma_{ij}$	Deformação cisalhante no plano $ij$
$\varepsilon_i$	Deformação normal na direção $i$
$\varepsilon$	Vetor de deformações
$\zeta$	Fator de amortecimento
$\eta_i$	Conjunto de funções que formam uma partição da unidade
$\theta$	Autovetor de um problema de grau $n+m$
$\lambda$	Autovalor
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\xi$ e $\eta$	Coordenadas normalizadas
$\rho$	Massa específica
$\tau_{ij}$	Tensão tangencial no plano $ij$
$\sigma_i$	Tensão normal na direção $i$
$\sigma$	Vetor de tensões
$\phi$	Autovetor de um problema de grau $n$
$\omega$	Frequência natural

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>20</b>
1.1	OBJETIVOS .....	22
1.1.1	OBJETIVO GERAL .....	22
1.1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	22
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO.....	22
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA.....</b>	<b>24</b>
2.1	VIBRAÇÕES NO PLANO .....	25
2.2	ESTADO PLANO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES .....	27
2.3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	29
2.4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS .....	33
<b>3</b>	<b>DINÂMICA DAS ESTRUTURAS .....</b>	<b>39</b>
3.1	CONCEITOS GERAIS .....	39
3.2	ESTADO PLANO .....	43
3.3	ANÁLISE DINÂMICA BIDIMENSIONAL.....	48
<b>4</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>52</b>
4.1	ANÁLISE TRANSIENTE .....	57
4.1.1	MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL .....	58
4.1.2	FATOR DE INFLUÊNCIA DOS MODOS DE VIBRAÇÃO .....	61
4.2	ELEMENTO RETANGULAR DE QUATRO NÓS .....	63
4.3	REFINAMENTO HIERÁRQUICO EM ELEMENTOS QUADRILATERAIS ...	66
<b>5</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS .....</b>	<b>74</b>
5.1	MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE .....	74
5.2	FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO .....	79
<b>6</b>	<b>INDICADOR DE ERRO DE FRIBERG .....</b>	<b>85</b>

<b>7</b>	<b>CARACTERÍSTICAS DO INDICADOR DE FRIBERG .....</b>	<b>90</b>
7.1	PROPRIEDADES DO CÁLCULO DO INDICADOR .....	90
7.2	ACURÁCIA DO INDICADOR EM ANÁLISES DE MEFH .....	94
7.3	INDICADOR DE FRIBERG EM ANÁLISES DE MEFG .....	98
7.3.1	PREDOMINÂNCIA DO PRIMEIRO NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO .....	99
7.3.2	A INFLUÊNCIA DE ELEMENTOS DISTORCIDOS.....	102
7.3.3	A INFLUÊNCIA DE FUNÇÕES DO TIPO BORDA.....	104
<b>8</b>	<b>ENRIQUECIMENTO SELETIVO NA ANÁLISE MODAL.....</b>	<b>111</b>
8.1	CHAPA QUADRADA ENGASTADA.....	111
8.1.1	PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL COMO ALVO .....	113
8.1.2	TERCEIRA FREQUÊNCIA NATURAL COMO ALVO .....	120
8.2	BARRAGEM DE TERRA.....	125
8.2.1	PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL COMO ALVO .....	127
8.2.2	QUARTA FREQUÊNCIA NATURAL COMO ALVO .....	133
8.3	CHAPA COM FURO CIRCULAR .....	138
8.3.1	PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL COMO ALVO .....	141
8.3.2	QUINTA FREQUÊNCIA NATURAL COMO ALVO .....	147
<b>9</b>	<b>ENRIQUECIMENTO SELETIVO NA ANÁLISE TRANSIENTE .....</b>	<b>152</b>
9.1	CARREGAMENTO HARMÔNICO .....	152
9.2	CARREGAMENTO DE IMPACTO .....	159
9.2.1	INFLUÊNCIA DO TEMPO DE IMPACTO.....	166
9.2.2	CRITÉRIO DE SELEÇÃO DOS MODOS INFLUENTES.....	169
9.2.3	MODIFICAÇÃO NO CÁLCULO DO FATOR DE INFLUÊNCIA .....	172
<b>10</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>180</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>184</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A constante busca por otimização estrutural tem levado à adoção de elementos cada vez mais leves e esbeltos em projetos. Tais características impactam a estabilidade da estrutura e análises dinâmicas se tornam essenciais para garantir seu correto dimensionamento. Além de contribuírem para evitar que estruturas estejam sujeitas a deslocamentos excessivos ou, em casos extremos, falhas, as análises dinâmicas também estão diretamente relacionadas à garantia de conforto dos usuários.

Frequências de vibrações que ocasionam desconforto do usuário são mais baixas do que aquelas que ocasionam danos na estrutura. As frequências apresentadas por edificações costumam ser baixas e próximas às dos órgãos internos do corpo humano. Isso explica por que as pessoas costumam tolerar frequências muito superiores em veículos, porém são rapidamente afetadas por movimentos da estrutura. Desse modo, vibrações perceptíveis aos moradores de uma edificação são capazes de afetar tanto sua qualidade de vida quanto sua eficiência de trabalho. (KOWALSKA-KOCZWARA; STYPULA, 2016). Reforça-se, assim, a importância de se realizarem análises dinâmicas precisas.

Análises dinâmicas são realizadas por meio de modelos matemáticos que representam a realidade. Esses só representam fielmente o modelo físico se todos os fatores que o afetam forem considerados. No entanto, a construção de modelos matemáticos depende do intuito com o qual foram originados, das características conhecidas e consideradas importantes e de como incertezas são incorporadas. Portanto, a construção de tais modelos é por si só extremamente complexa e sujeita a imprecisões. Além disso, muitos desses modelos matemáticos não possuem solução analítica conhecida e, conseqüentemente, precisam ser solucionados por meio de métodos aproximados (SZABO; BABUSKA, 1991).

Dentre os métodos aproximados, o Método dos Elementos Finitos (MEF) se destaca devido à facilidade de entendimento e capacidade de generalização. Por este motivo, o MEF é o método mais utilizado em programas de análise estrutural, como o SAP2000, ANSYS, DIANA, COMSOL, dentre outros. Como qualquer método aproximado, a principal desvantagem do MEF é a presença de erros em suas



respostas. Esses advêm de três fontes principais: a discretização do domínio, a aproximação da solução e erros numéricos inerentes a operações com pontos flutuantes.

É na busca pela minimização do efeito das duas primeiras fontes de erros que surgem os processos de refinamento. Os principais refinamentos utilizados no MEF são os tipos  $h$ ,  $r$ ,  $p$  e  $hp$ . Esses consistem, respectivamente, em mudar o número de elementos, reposicionar os nós, aumentar a ordem dos polinômios utilizados e em combinar o refino  $h$  com o  $p$  (NOVOTNY; FANCELLO, 1998).

Apesar da facilidade de aplicação, refinamentos tradicionais elevam muito os custos computacionais necessários para resolução dos problemas. Isso ocorre porque além de aumentarem o número de graus de liberdade, podem aumentar, como no refino  $p$ , a complexidade dos elementos. Nesse contexto, surgem métodos enriquecidos, como o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), que utilizam funções enriquecedoras relacionadas a informações particulares de cada problema para melhorar o espaço de aproximação (WEINHARDT, 2016).

A aplicação do MEFG eleva as taxas de convergência dos resultados em relação aos refinamentos tradicionais, no entanto, assim como no refino  $p$ , aumenta a complexidade do problema numérico. Para buscar equilibrar tais efeitos utilizam-se estimadores e/ou indicadores de erro que identifiquem quais elementos do problema mais afetam a solução. Com isso, é possível aplicar enriquecimentos somente nos elementos que mais impactem a solução global.

Malacarne (2018), desenvolveu sua pesquisa justamente com o foco de aplicar o MEFG localmente a diferentes elementos. No entanto, o autor não abordou problemas bidimensionais e, conseqüentemente, as dificuldades que surgem ao se aplicar refinamentos seletivos em tais elementos.

Além disso, na análise transiente, o enriquecimento seletivo pode ser combinado com técnicas de condensação modal, como a proposta por Debella (2018). Em sua pesquisa, a autora propõe um Fator de Influência que identifica quais modos mais contribuem para a resposta do problema. Em sequência, as matrizes modais são condensadas para conter somente tais modos. Assim como Malacarne (2018), a autora não explorou problemas bidimensionais. Portanto, a eficiência da proposta, em tais problemas, ainda deve ser investigada.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é aplicar enriquecimentos seletivos de malha na análise dinâmica de estruturas no estado plano de tensão e deformação com o uso do Método dos Elementos Finitos Generalizados e do indicador de erro de Friberg.

### 1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para atingir o objetivo geral pretende-se:

- Avaliar a utilização do indicador de erro de Friberg como guia para enriquecimentos seletivos;
- Verificar a eficiência de enriquecimentos seletivos de malha em problemas de estado plano de tensão e deformação;
- Avaliar a aplicação de enriquecimentos seletivos em conjunto com técnicas de redução de matrizes modais em análises transientes de problemas de estado plano de tensão e deformação.

## 1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho é dividido em 10 capítulos. O capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura focando em trabalhos desenvolvidos com ênfase em vibrações no plano, estado plano de tensões e deformações, MEF e MEFG. Dentro desse, o item referente ao MEFG é o mais detalhado visando demonstrar especificamente onde a pesquisa atual se encaixa no contexto geral exposto.

O capítulo 3 aborda conceitos gerais de problemas dinâmicos e diferentes considerações que foram adotadas ao longo do trabalho. Além disso, é detalhado o problema dinâmico bidimensional assim como os fundamentos de estado plano de tensões e deformações utilizados na formulação.

Em sequência, os capítulos 4 e 5 detalham as características e formulações dos métodos numéricos utilizados no trabalho. O capítulo 4 aborda o MEF, incluindo uma descrição do tipo de elemento utilizado e do procedimento de refinamento hierárquico. Além disso, nesse capítulo é descrito o critério adotado para condensação das matrizes em análises transientes. Já o capítulo 5 aborda o MEFG através de uma descrição do Método da Partição da Unidade e de como são obtidas as funções de enriquecimento.

O capítulo 6 aborda a formulação do indicador de Friberg. Um teste inicial da aplicabilidade do indicador assim como suas características é apresentado no capítulo 7. Nesse último é avaliado a precisão, a relação com o erro e o comportamento em refinamentos hierárquicos do indicador.

Exemplos de enriquecimento seletivo de problemas de estado plano de tensões e deformações são apresentados no capítulo 8. Nesse é realizada uma análise da influência que o refino sequencial, guiado pelo indicador de Friberg, tem no resultado obtido para o comportamento modal da estrutura. Além do efeito nas frequências e modos naturais de vibração, são indicados os impactos nos tempos computacionais gerados pelo enriquecimento seletivo da malha.

No capítulo 9 são desenvolvidos dois exemplos de análise transiente, um com carregamento harmônico e outro com carregamento de impacto. Em ambos são apresentadas as respostas de comportamento dos deslocamentos, velocidades e acelerações. As soluções são obtidas através do MEFH com refino  $p$  de ordem 9, MEFG e MEFG com condensação das matrizes modais com e sem enriquecimento seletivo.

As principais conclusões obtidas nos capítulos 7, 8 e 9 são resumidas no capítulo 10. Nesse são indicadas, também, sugestões para trabalhos futuros. Essas incluem tanto ideias de continuações para o presente trabalho como modificações aos processos desenvolvidos com base em uma análise crítica de possíveis melhorias.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Todo elemento construtivo é, na realidade, um elemento tridimensional (3D). No entanto, o esforço computacional necessário para corretamente avaliar o comportamento dinâmico de estruturas 3D costuma ser muito elevado quando comparado a análises de elementos bidimensionais (2D) e unidimensionais (1D). Isso explica por que projetistas buscam representar o maior número de estruturas possíveis como elementos 1D e 2D equivalentes que mantenham as propriedades gerais do sistema original (JAFARI-TALOOKOLAEI; ABEDI; ATTAR, 2017).

Existem elementos, em particular, que permitem que tais simplificações sejam feitas sem grandes dificuldades, por possuírem, em sua natureza, um comportamento predominante em uma ou duas direções. É o caso por exemplo de barras, que por possuírem como principal variável de interesse o deslocamento em uma direção, podem facilmente ser representadas como sistemas 1D.

Já estruturas de chapas e placas, por serem caracterizadas como tendo uma de suas dimensões muito inferiores às demais, são comumente aproximadas como elementos bidimensionais. A análise vibratória de tais elementos aborda tanto vibrações que ocorrem no plano de suas maiores dimensões, denominadas simplificadaamente de vibrações no plano, como vibrações transversais (fora do plano), essas últimas sendo aquelas que ocorrem nos planos formados com a menor dimensão do elemento.

Chapas e placas são elementos comumente adotados nas mais diversas áreas da engenharia podendo ser encontradas tanto em estruturas civis quanto em projetos aeroespaciais. O estudo do comportamento de vibrações transversais dos elementos, quando aplicável, é um tema bastante abordado uma vez que os movimentos transversais tendem a ser excitados por forças externas (CHEN; JIN; LIU, 2014).

No entanto, o estudo do comportamento de vibrações no plano tem se tornado um tema cada vez mais abordado uma vez que essas estão diretamente ligadas à transmissão de energia de vibração (ZHOU et al., 2017). Além disso, o efeito da vibração no plano ganha importância à medida que se analisam frequências mais elevadas (BERCIN; LANGLEY, 1996).

## 2.1 VIBRAÇÕES NO PLANO

O estudo do efeito de vibrações no plano é um tema bastante abordado no meio acadêmico. Diversos trabalhos focados no assunto foram produzidos durante as décadas de 80 e 90 (LYON, 1985; LANGLEY; BERCIN, 1994; OVUNC, 1994; FARAG; PAN, 1998). Tais trabalhos englobaram diversos aspectos desde o comportamento dinâmico das estruturas até o impacto dessas vibrações na transmissão de sons.

O estudo do comportamento de vibrações no plano continuou sendo um tema relevante na literatura ao longo dos anos 2000 quando tópicos como a vibração livre e forçada no plano de diferentes estruturas, busca por soluções analíticas e aplicação de diferentes métodos foram abordados (WANG; WERELEY, 2002; GORMAN, 2006; DU et al., 2007; XING; LIU, 2009).

A relevância do tema continua válida na década atual na qual o estudo de vibrações no plano ainda é o foco de vários trabalhos. Tomando como base pesquisas publicadas ao longo dos últimos cinco anos é possível se chegar à uma série de conclusões sobre o estudo de vibrações no plano de estruturas.

A primeira dessas refere-se à aplicabilidade da análise de vibrações no plano às mais variadas estruturas. Tal fato é exemplificado por serem encontradas pesquisas que abordam vibrações no plano de elementos desde placas retangulares (CHEN; JIN; LIU, 2014; ARREOLA-LUCAS et al., 2015; CHEN et al., 2017; ZHOU et al., 2017) até placas anulares (WANG et al., 2016), painéis anulares (LYU et al. 2017; LYU et al.; 2018), vigas (JAFARI-TALOOKOLAEI; ABEDI; ATTAR, 2017) e arcos (NOORI; ASLAN; TEMEL, 2018).

Além da grande variedade de estruturas nas quais são realizadas as análises, destaca-se também a vasta gama de métodos que vem sendo aplicados na busca por soluções cada vez mais próximas da realidade e fáceis de serem obtidas. Esses podem ser divididos em três grandes grupos: análises exatas, aproximadas e experimentais.

O primeiro grupo mencionado pode ser exemplificado por Zhou et al. (2017) que estudaram soluções exatas para vibração no plano de placas retangulares. A proposta de solução foi baseada no método de *reverberation ray matrix* e no algoritmo *golden section search*. O primeiro foi utilizado para obter a equação característica e o

segundo para obter os resultados de frequências e modos naturais. Os resultados obtidos foram comparados com outros previamente apresentados na literatura assim como com resultados obtidos pelo MEF através do software ABAQUS. A comparação de resultados levou a diferenças entre parâmetros de frequência somente a partir da terceira casa decimal, comprovando, assim, a aplicabilidade do método utilizado.

O segundo grupo é aquele no qual se encaixam a maior parte dos trabalhos. É o caso, dentre outros, dos trabalhos de Chen, Jin e Liu (2014) que analisaram o comportamento de placas retangulares com furos através do Método Lagrangeano Chebyshev, e Wang et al. (2016) que desenvolveram um método de Fourier-Ritz modificado para análise de placas anulares. Além desses, valem ser citados os estudos realizados por Dabbagh et al. (2017) que utilizaram o MEF na análise de vibração de placas, Chen et al. (2017) que utilizaram o MEF Isogeométrico na análise de vibrações livres de placas ortotrópicas, e Lyu et al. (2018) que construíram os campos de deslocamentos de painéis anulares rotacionais por expansões de Fourier complementadas por funções suavizadas no contorno.

Já o terceiro grupo mencionado, focado em análises experimentais, pode ser exemplificado pelo estudo de Arreola-Lucas et al. (2015). Os autores avaliaram o problema de vibrações no plano de placas retangulares através de uma análise experimental utilizando transdutores acústicos eletromagnéticos e teoricamente através do método da expansão de ondas planas. Foram obtidos resultados de frequências e conclui-se que, para as 95 primeiras frequências, os resultados experimentais e os teóricos levavam a soluções com diferenças inferiores a 1,4% entre si.

Por fim, considerando os trabalhos mencionados até então, é possível também os dividir de acordo com a abordagem que adotaram para analisar o problema de vibração no plano. Enquanto alguns trabalhos, como é o caso do desenvolvido por Jafari-Talookolaei, Abedi e Attar (2017), formularam exemplos nas três dimensões, a maioria simplifica o problema como sendo bidimensional. Para esse último caso existem trabalhos como o de Langley e Bercin (1994), que se baseiam na equação da onda, e trabalhos que abordam o problema através da consideração de um estado plano de tensões e/ou deformações. Esse é o caso apresentado, por exemplo, nos trabalhos de Du et al. (2007) e Chen et al. (2017).

## 2.2 ESTADO PLANO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES

Na busca por redução de custos computacionais diversos problemas da engenharia podem ser simplificados como problemas de estado plano de tensões ou deformações. Barragens de gravidade, por exemplo, costumam ser analisadas através dessa simplificação. Ao fazer uma análise sísmica dessas estruturas, tanto o corpo da barragem quanto a fundação podem ser abordados como um problema de estado plano de deformações. Outro exemplo, mais fácil de ser encontrado, são as vigas paredes, que costumam ser analisadas como problemas de estado plano de tensões (ZHAO; STEVEN, 1996).

A adoção do estado plano na solução de problemas dinâmicos bidimensionais não é algo recente. Trabalhos pioneiros no desenvolvimento do MEF como é o caso do trabalho de Turner et al. (1956) adotaram o estado plano de deformações para desenvolvimento da matriz de rigidez de placas. O tema continuou sendo pertinente nas décadas seguintes e pode ser observado em uma série de publicações acadêmicas.

Hrennikoff (1968) fez uma análise do uso de diferentes tipos de matriz de rigidez na resolução de problemas bidimensionais considerando o estado plano de tensões. O autor testou as matrizes construídas através de princípios estáticos e de energia para elementos trapezoidais equilaterais e concluiu que ambas levavam a resultados com precisões similares.

Gupta (1979) estudou uma formulação dinâmica de elementos finitos para elementos triangulares. Uma expansão de tal trabalho foi realizada por Mukherjee e Chattopadhyay (1994). Os autores utilizaram a discretização dinâmica na análise de vibrações livres de placas com o uso de elementos retangulares de quatro nós e enrijecedores lineares sem nós integrados aos elementos. Ambos os trabalhos adotaram o estado plano para formulação de seus problemas e chegaram a resultados com economia no esforço computacional quando comparados ao MEF convencional.

No início dos anos 2000, a consideração do estado plano continuou marcando publicações da área de MEF. Cheung, Zhang e Chen (2000), estudaram o uso de elementos quadrilaterais refinados não conformes. Os autores realizaram análises estáticas e dinâmicas e adotaram o estado plano de deformações para análise de



exemplos de uma barragem de terra e de um cilindro de paredes espessas. Os autores obtiveram resultados com alta precisão, porém com custo computacional mais elevado em relação a outros elementos não conformes presentes na literatura.

Em seus estudos sobre análise dinâmica de elementos planos através do uso de elementos  $p$ -Fourier, Leung et al. (2003 e 2004) também adotaram o estado plano em suas formulações. Em 2003, os autores analisaram vibrações bidimensionais visco elásticas e em 2004 focaram em elementos trapezoidais analíticos na análise de vibração de problemas planos. Em ambos os trabalhos foram adotadas funções de enriquecimento trigonométricas para evitar problemas de mau condicionamento. Ao serem comparados com resultados do MEF convencional, os elementos propostos levaram a resultados mais precisos com o mesmo número de graus de liberdade.

Apesar de sua ampla abordagem no decorrer dos anos, a consideração do estado plano na análise de vibrações de elementos bidimensionais continua relevante na atualidade. Considerando somente os últimos três anos é possível encontrar diversos trabalhos que adotam tal consideração.

Kamal et al. (2017) compararam resultados obtidos através do estado plano de tensões, do estado plano de deformações generalizado e do MEF 3D em uma análise elasto-plástica de um cilindro de paredes espessas sujeito a um gradiente térmico. Os autores observaram que o estado plano, para o caso estudado, não levava a bons resultados quando a relação entre o comprimento e a espessura das paredes era maior do que 0,5 e menor do que 6. Fora dessa faixa, a simplificação levava a resultados condizentes com os esperados.

Trabalhos como o de Ho-Nguyen-Tan e Kim (2018) adotaram o estado plano de tensões na formulação de suas análises. Os autores focaram no desenvolvimento de um elemento de interface para o acoplamento de malhas de cascas não equivalentes e obtiveram resultados que verificaram o “*patch test*” e com convergência superior às obtidas com elementos triangulares.

Enquanto isso, Vu-Hoang, Vo-Minh e Nguyen-Xuan (2018) adotaram o estado plano de deformações em suas análises não lineares de problemas geotécnicos. O problema de estabilidade de encostas foi resolvido através do MEF com uso de refinamentos do tipo bolha em elementos quadrilaterais. Através do método iterativo

de Newton-Raphson foram obtidos resultados condizentes com valores analíticos previamente disponíveis na literatura.

Tomando como base os trabalhos apresentados até então, percebe-se que a consideração de um estado plano de tensões ou deformações é uma abordagem não só aplicável como também pertinente no estudo de vibrações no plano. Além disso, um aspecto que se destaca ao se analisar as pesquisas citadas, tanto neste item (2.2) quando no anterior (2.1), é a importância que o MEF tem em seus desenvolvimentos, sendo usado, na grande maioria, como método de solução principal ou como base de comparação de resultados.

Fica evidente, assim, que o MEF é um dos métodos mais conceituados e essenciais para a realização de análises dinâmicas. Sua importância se dá, dentre outros motivos, pela vasta gama de pesquisas já realizadas com o método e pela inserção desse em softwares comerciais de fácil acesso e manipulação. Sendo assim, o MEF continua sendo um dos principais métodos de solução de problemas dinâmicos, e acima de tudo, de geração de resultados confiáveis para validação de novos métodos numéricos.

## 2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O processo de subdivisão de sistemas complexos em uma série de elementos cujo comportamento é mais facilmente compreendido é uma adaptação natural na busca por contornar as limitações da mente humana. Uma vez solucionado o problema para cada elemento o sistema original pode ser reconstruído. Tal procedimento, adotado nas mais diversas áreas profissionais, desde a ciência até a economia, é a base para o principal método de solução aproximada adotado nas áreas de engenharia, o Método dos Elementos Finitos (MEF) (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

O MEF consiste em aproximar um sistema contínuo, com infinitos graus de liberdade, como um sistema discreto, com finitos graus de liberdade (RAO, 2008). Desse modo, um problema anteriormente regido por equações diferenciais passa a ser representado por equações algébricas, possuindo, assim, soluções mais fáceis de serem obtidas. Isso se torna fundamental para a resolução de problemas cujas

soluções analíticas não são conhecidas, como é o caso de estruturas com variações de geometria e/ou material (CHOPRA, 1995).

A criação do MEF é usualmente creditada às indústrias aeronáuticas americanas e britânicas, que na década de 50 utilizaram o método na análise de tensões em asas de aviões (VAZ, 2011). Entretanto, as ideias base do método podem ser observadas nos trabalhos realizados por Richard Courant desde a década de 20.

O matemático inicialmente abordou conceitos do MEF em 1922 em sua pesquisa sobre a existência de uma variação do Teorema de Mapeamento de Riemann. Pouco tempo depois, em conjunto com Hilbert, Courant lançou o livro "*Methoden der mathematischen Physik*" no qual apresentou uma breve descrição da ideia base do que viria a ser o MEF. Por fim, em 1943 o autor aplicou as bases do método a problemas de torção de Saint-Venant (HURWITZ; COURANT, 1922; COURANT; HILBERT, 1924; COURANT, 1943 apud WILLIAMSON JR., 1980). Destaca-se, entretanto, que esses trabalhos não tinham como foco o desenvolvimento do método e que a principal contribuição de Courant foi o desenvolvimento da ideia de minimização de um funcional através de uma aproximação linear em subdomínios (GUPTA; MEEK, 1996).

Apesar da contribuição de Courant, foi de fato na década de 50 que o método passou a ser tratado como foco de pesquisas e teve seus principais conceitos conhecidos na atualidade devidamente formulados. Argyris (1954) forneceu as relações entre tensões e deformações com cargas e deslocamentos, gerando assim equações matriciais que compõem a formulação padrão do MEF. O trabalho sistematizou a ideia de análise global de uma estrutura através da junção de sistemas de equações elementares.

A proposição do Método da Rigidez Direta por Turner et al. (1956) permitiu uma implementação mais genérica e eficiente do método que viria a ser o MEF. Além de terem abordado análises estáticas e dinâmicas, e avaliarem pela primeira vez questões de convergência do método, os autores aplicaram com sucesso o método à elementos bidimensionais de geometria triangular.

O termo Método dos Elementos Finitos foi utilizado pela primeira vez por Clough em 1960 para criar uma distinção entre análises contínuas e os métodos matriciais (CLOUGH, 1960; CLOUGH; WILSON, 1962 apud GUPTA; MEEK, 1996). O

MEF, até então baseado no princípio dos deslocamentos virtuais, passou a ser formulado através da minimização do funcional de energia potencial total (MELOSH, 1963). Nessa mesma época foram definidos os requisitos de compatibilidade e completude necessários pelo método (MELOSH, 1963; IRONS; BARLOW, 1964; IRONS, 1966).

A popularização do MEF teve como importante marco o lançamento do livro *“The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals”*. Originalmente publicado em 1967 o livro foi o primeiro escrito sobre o MEF e consolidou a transferência dos conhecimentos sobre o método da indústria aeroespacial para o meio acadêmico em geral (ZIENKIEWICZ; TAYLOR e ZHU, 2005; VAZ, 2011).

Até então, o MEF vinha sendo formulado com base em princípios variacionais e era aplicado a problemas regidos por funcionais. No entanto, no fim da década de 60 e início dos anos 70, o MEF passou a ser formulado de diversas maneiras e aplicado em problemas não regidos por funcionais (SORIANO, 2003). Szabo e Lee (1969) derivaram as matrizes de rigidez do MEF para problemas elásticos através do Método de Galerkin e, Lynn e Arya (1973) formularam relações do MEF através do Método dos Mínimos Quadrados.

Sendo assim, o MEF, na passagem das décadas de 50 a 70, impulsionado pelo crescente uso de computadores, deixa de ser um método “grosseiro” de análise da mecânica do contínuo formulado através de analogias físicas de problemas discretos e se transforma em um método com formulação matemática bem estabelecida. Desse modo, foi desconstruída a ideia inicial de que outros métodos como o Método das Diferenças Finitas possuíam maior acurácia matemática e possibilidade de generalização (ZIENKIEWICZ, 1983).

Os componentes básicos do MEF estabelecidos até o início dos anos 70 não mudaram até hoje (FELIPPA, 2001). A principal vantagem do método é a possibilidade de formulação das equações do problema para elementos de geometria simples e propriedades constantes. Com base nesses, o domínio original pode ter quaisquer características e ser corretamente representado (TORII, 2012). No mais, o MEF apresenta certa facilidade de compreensão uma vez que pode ser abordado tanto fisicamente quanto matematicamente, dependendo da preferência do autor (DESAI; ABEL, 1972).

Por fim, uma grande vantagem do método encontra-se na eficiência de esquemas computacionais existentes para resolução dos sistemas finais de equações. Isso decorre do fato de que a maioria dos problemas são formulados através de matrizes esparsas e simétricas, ou seja, que podem ser altamente simplificadas computacionalmente (BATHE, 1996).

Em todo processo de aproximação, por definição, está embutido um erro. Portanto, é essencial para uma correta aplicação desses métodos na engenharia que se possa compreender, acessar e reduzir os erros gerados. Com um método bem estabelecido, como é o caso do MEF, o foco das produções acadêmicas para a evolução do mesmo passa a ser, então, como obter soluções cada vez mais “exatas” e economicamente viáveis. Nesse contexto, surgem os procedimentos adaptativos de refinamento do método (ZIENKIEWICZ, 1983).

Processos de refinamento do MEF foram inicialmente baseados na ideia de otimização de malhas, como pode ser observado nos trabalhos de Oliveira (1968), Turcke e McNeice (1974) e Prager (1975). Refinamentos baseados em alteração da malha utilizada são conhecidos como refinamentos  $h$  ou  $r$ . O refino  $h$  consiste em modificar o tamanho dos elementos utilizados, podendo esses serem aumentados ou diminuídos de acordo com a região analisada. Já o refino  $r$  consiste em reposicionar nós já existentes, redistribuindo, assim, o erro (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

Outro processo de refinamento muito difundido é o tipo  $p$ , no qual aumenta-se a ordem das funções utilizadas sem necessidade de modificações na discretização previamente adotada. Introduzido na década de 70 pelos trabalhos de Peano (1976), Szabo e Mehta (1978) e Petruska (1978), o refinamento  $p$  foi inicialmente aplicado na área de engenharia por Zienkiewicz (1983).

O refino  $p$  tradicionalmente leva a taxas de convergência superiores ao  $h$ , no entanto, esse último é mais fácil de ser aplicado. Quando os refinamentos  $h$  e  $p$  são aplicados em conjunto o processo é denominado  $hp$ . Tal procedimento pode ser realizado aplicando-se simultaneamente os dois refinamentos ou um em sequência do outro (NOVOTNY; FANCELLO, 1998).

Ao realizar refinamentos do tipo  $p$ , a escolha das funções cabe a quem está analisando o problema. No entanto, é vantajoso que sejam escolhidas funções que gerem bases hierárquicas. Isso significa escolher uma base na qual o conjunto de

funções de forma de ordem  $n$  esteja contido no conjunto de ordem  $n+1$ . Por consequência, a matriz de rigidez do elemento de ordem  $n$  será uma submatriz do elemento de ordem  $n+1$ . Desse modo, o uso de bases hierárquicas diminui a exigência computacional necessária na resolução do problema (PEANO, 1976; MEIROVITCH; BARUH, 1983). Quando o MEF é aplicado através de bases hierárquicas de funções esse é conhecido como Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH).

Como alternativa aos procedimentos de refinamento, o aumento da precisão dos resultados pode ser obtido pela utilização de métodos enriquecidos. Esses baseiam-se no enriquecimento das funções de forma do MEF tradicional com termos relacionados com a solução da equação governante do problema. Um método enriquecido que vem se mostrando bastante promissor é o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (ARNDT, 2009).

## 2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) pode ser encontrado na literatura como Método dos Elementos Finitos Especial, Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade e Método dos Elementos Finitos baseado nas Nuvens *hp*. Isso ocorre, pois, o método foi proposto independente e simultaneamente por diversos autores (BABUSKA; CALOZ; OSBORN, 1994; MELENK; BABUSKA, 1996; DUARTE; ODEN, 1996; ODEN; DUARTE; ZIENKIEWICZ, 1998; DUARTE; BABUSKA; ODEN, 2000). Recentemente, também foi considerado equivalente ao Método dos Elementos Finitos Estendidos (FRIES; BELYTSCHKO, 2010).

O MEFG pode ser visto como uma combinação do MEF com o Método da Partição da Unidade (MPU). O MPU, inicialmente introduzido por Melenk e Babuska (1996), é um método alternativo ao MEF para geração de espaços de aproximação no qual as bases de funções sempre possuem soma unitária em qualquer ponto do domínio.

O MEFG consiste em gerar espaços de aproximação combinando funções linearmente independentes e multiplicando-as pelas funções de base do MPU (PETROLI, 2016). De acordo com Babuska e Banerjee (2012), o MEFG é definido, então, como um método onde o espaço tentativa do MEF convencional é aprimorado

com funções de forma polinomiais ou não, que são conhecidas como enriquecimentos. Essas funções retratam o comportamento da solução desconhecida, inserindo conhecimentos prévios sobre a solução da equação diferencial que rege o problema no espaço de solução aproximado.

Existem diversos métodos que também utilizam o MPU na construção dos espaços de aproximação, como é o caso dos métodos sem malha apresentados por Belytschko, Lu e Gu (1994), e Duarte e Oden (1996). No entanto, tais métodos diferem do MEFG pela escolha da partição da unidade, uma vez que nesse último essas funções advêm do MEF convencional, evitando assim problemas de integração numérica comumente presentes com outros grupos de funções (DUARTE; BABUSKA; ODEN, 2000).

Decorrente desse mesmo fator, uma das principais vantagens do método é a possibilidade de implementação do mesmo com pequenas modificações em algoritmos robustos já desenvolvidos para o MEF (STROUBOULIS; BABUSKA; COPPS, 2000). Além disso, o uso do MEFG permite obter a regularidade desejada nos espaços de aproximação independente dos espaços locais, apresenta boas soluções para problemas com domínios complexos e possibilita a realização de refinamentos hierárquicos (ARNDT, 2009).

O MEFG tem sido aplicado com sucesso a problemas dinâmicos como demonstrado pelos trabalhos de Arndt (2009), Arndt, Machado e Scremin (2010), Torii e Machado (2012), Arndt, Machado e Scremin (2016), Piedade Neto e Proença (2016), Shang, Machado e Abdalla Filho (2016), Weinhardt (2016), Shang et al. (2017), Debella (2018), Malacarne (2018), Shang, Machado e Abdalla Filho (2019) e Debella et al. (2019), dentre outros. Fica evidente, pelo volume de trabalhos que abordam o tema, a relevância desse no meio acadêmico.

Arndt (2009) avaliou a aplicação do MEFG em problemas dinâmicos de estruturas reticuladas. O autor testou a eficiência e a convergência do método quando aplicado a estruturas reticuladas planas e comparou os resultados de frequências obtidos com suas soluções analíticas e com valores provenientes de outros métodos aproximados. Observou-se que o MEFG leva a taxas de convergência maiores do que o MEF tradicional, o MEF com refino  $h$  e o Método Composto (MC).



Em sequência, Torii e Machado (2012) continuaram o estudo da aplicação do MEFG a estruturas reticuladas. Os autores avaliaram a resposta dinâmica no tempo de barras e treliças através do Método da Superposição Modal e do Método de Newmark. Os autores obtiveram respostas mais precisas do que as obtidas pelo MEF e MEFH.

Para uma correta análise dinâmica é necessário determinar as frequências e modos de vibração de um sistema de maneira precisa. No entanto, métodos numéricos incluindo o MEFG costumam apresentar erros maiores para altas frequências. Visando melhorar os resultados obtidos, Arndt, Machado e Scremin (2010) aplicaram o MEFG Adaptativo idealizado por Arndt (2009). Através desse método é possível refinar rapidamente o resultado de uma frequência específica associada a determinado modo de vibração, mesmo que a malha apresente uma discretização grosseira.

As aplicações do MEFG Adaptativo foram expandidas por Arndt, Machado e Scremin (2016) ao analisarem as respostas dinâmicas de estruturas reticuladas e vigas uniformes e não uniformes de Euler-Bernoulli. Assim como nos trabalhos anteriores que testaram essa variação do MEFG, os autores obtiveram resultados condizentes e mais precisos que aqueles resultantes do MEF tradicional e do MEF-*h*.

A análise dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli através do MEFG também foi abordada por Shang, Machado e Abdalla Filho (2016). As funções de forma foram enriquecidas com termos trigonométricos e exponenciais e foram avaliados problemas elásticos e elasto-plásticos. Os resultados obtidos foram comparados com respostas resultantes do uso do MEF tradicional e foi concluído que o MEFG leva a resultados mais eficientes, especialmente ao se analisarem frequências elevadas.

Piedade Neto e Proença (2016) avaliaram a acurácia e estabilidade do MEFG na análise dinâmica. Os autores investigaram as respostas no tempo de exemplos lineares e não lineares e testaram os efeitos do uso de matrizes de massa diagonalizadas. Os resultados de deslocamentos e campos de tensões obtidos foram comparados com valores provenientes do MEF tradicional e se mostraram compatíveis com o esperado. Além disso, os autores demonstraram que a aplicação da matriz de massa diagonalizada proposta evitava um aumento no número de condição, mesmo para níveis superiores de refinamento.

Apesar de suas vantagens, Shang, Machado e Abdalla Filho (2016) destacam que a introdução de funções enriquecedoras às funções de forma pode levar ao mal condicionamento das matrizes. De acordo com Babuska e Banerjee (2012) isso ocorre, pois, a eficiência do MEFG está ligada à escolha das funções de forma. Em alguns casos as funções enriquecedoras e as funções de base do MPU são linearmente dependentes ou quase dependentes, o que leva ao mal condicionamento das matrizes do sistema. O mal condicionamento das matrizes leva, então, a menor precisão dos resultados. Buscando contornar tais problemas, os autores propuseram o MEFG Estabilizado (MEFGE).

O estudo da estabilidade do MEFG foi também abordado no trabalho de Weinhardt (2016). Nesse propôs-se duas técnicas de estabilização do MEFG, uma adaptação do MEFGE voltado à análise dinâmica e uma estratégia de pré-condicionamento das funções de enriquecimento. O autor testou exemplos uni e bidimensionais e as adaptações propostas permitiram obtenção de resultados melhores de frequências elevadas e levaram a uma melhora na estabilidade do método.

Debella (2018) focou na aplicação do MEFG em análises transientes para barras, treliças e vigas de Euler-Bernoulli. A autora condensou a matriz modal de modo a eliminar modos de vibração com má aproximação. Além disso, avaliou a influência de cada modo na resposta transiente e a aplicação do MEFG Adaptativo. Concluiu-se que, de modo geral, os valores de deslocamentos, velocidades e acelerações obtidos são mais precisos quando apenas os modos de vibração mais predominantes são utilizados na matriz modal.

Outro autor a focar sua pesquisa em estruturas de barras, treliças e vigas de Euler-Bernoulli foi Malacarne (2018). O autor avaliou o uso do indicador de Friberg em análises dinâmicas realizadas pelo MEFG. A técnica adotada permitiu que fossem escolhidos elementos específicos da malha para serem enriquecidos, diminuindo assim o custo computacional necessário para aumento da acurácia dos resultados. As respostas obtidas foram comparadas com resultados provenientes de análises realizadas através do MEF e MEFG convencionais. A técnica proposta se mostrou aplicável uma vez que levou a taxas de convergência muito próximas às dos demais métodos avaliados. O autor destaca que o indicador pode ser aplicado a diferentes

métodos, desde que esses sejam hierárquicos e sugere ampliação do estudo para elementos bidimensionais.

Shang et al. (2017) exploraram a aplicação do MEFG em problemas de vibração livre considerando o estado plano de tensões para casos de malha severamente distorcida. Através do uso de elementos quadrilaterais enriquecidos com funções trigonométricas e exponenciais os autores obtiveram respostas para exemplos com malhas uniformes e não uniformes. Os resultados obtidos mostraram-se condizentes com os obtidos através do MEFH, Método  $p$ -Fourier e métodos sem malha. No entanto, à medida que a malha se torna muito distorcida, os elementos propostos deixam de ser recomendados em comparação a outros métodos sem malha. Para contornar tais problemas os autores aumentaram os níveis de refinamento utilizados e concluíram que, enquanto tal procedimento melhora resultados das frequências mais baixas, os resultados de frequências altas ainda não eram competitivos quando se avaliava a acurácia em conjunto com o custo computacional.

Shang, Machado e Abdalla Filho (2019) aplicaram o MEFG a problemas dinâmicos bidimensionais elasto-plásticos. O problema foi modelado com o uso de elementos quadrilaterais enriquecidos com funções trigonométricas. Os exemplos foram analisados considerando um estado plano de tensões. Em comparação com resultados obtidos através do MEFH, o MEFG se mostrou competitivo, aumentando rapidamente suas taxas de convergência à medida que se aumenta o nível do enriquecimento. Os autores ressaltam que um cuidado deve ser tomado em relação ao aumento do número de condição da matriz de massa, uma vez que esse tende a valores maiores à medida que se aumenta o enriquecimento e é superior aos valores apresentados pelo MEFH. No entanto, para o estudo realizado, a validade dos resultados não foi afetada por tal fator.

A revisão apresentada teve como principal objetivo detalhar onde o presente trabalho se encaixa. O item 2.1 introduziu e demonstrou a relevância do problema geral que a pesquisa se propõe a analisar, que é o problema de vibrações no plano de estruturas bidimensionais. Considerando isso, o item 2.2 justifica a adoção do estado plano de tensões e deformações na análise de tais problemas.

Por fim, os itens 2.3 e 2.4 destacam a importância do MEF e de métodos derivados desse como o MEFH e o MEFG na análise de problemas dinâmicos. As

vantagens do MEFG foram demonstradas através da exemplificação de trabalhos desenvolvidos na área, assim como adaptações e diferentes aplicações propostas.

Com base em tais exemplos, verifica-se que o estudo do MEFG em problemas de estado plano vem se mostrando bastante promissor. Porém, as variações do MEFG ainda não foram testadas integralmente em elementos bidimensionais, como é o caso, dentre os estudos apresentados, do MEFG Adaptativo, da técnica de condensação da matriz modal na análise transiente e da aplicação de indicadores de erro para enriquecimento seletivo.

### 3 DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

A importância do comportamento dinâmico de estruturas é muitas vezes associada a situações de carregamentos extremos como é o caso de efeitos sísmicos sobre uma estrutura. Carregamento dinâmico, no entanto, é todo aquele cuja magnitude, direção e/ou posição varia ao longo do tempo, gerando assim respostas na estrutura que também possuem variação temporal. Desse modo, a ação do vento, a passagem de veículos e o caminhar ou dançar de pessoas, situações comuns são, também, carregamentos dinâmicos (KERKOFF et al., 2018).

#### 3.1 CONCEITOS GERAIS

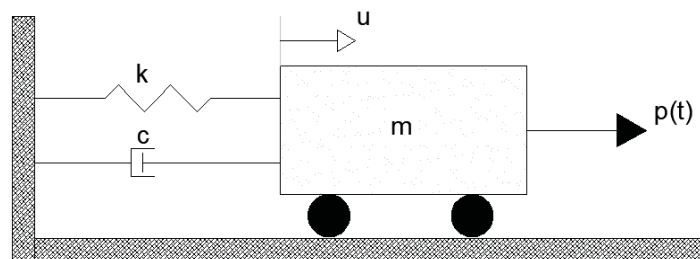
Vibrações são movimentos que se repetem após um determinado intervalo de tempo, podendo ser livres ou forçadas. Vibrações livres ocorrem quando forças externas não atuam sobre o sistema e o movimento persiste por si só após o sistema ser retirado de sua posição de equilíbrio. Já as vibrações forçadas são aquelas na qual o movimento persiste devido à atuação de forças externas (RAO, 2008).

Vibrações podem ter comportamento linear ou não linear. A não linearidade de sistemas oscilatórios pode decorrer do uso de materiais cuja relação entre tensão e deformação é não linear, ou de grandes deslocamentos e/ou rotações. No primeiro caso, a não linearidade é conhecida como material, enquanto no segundo caso a não linearidade é classificada como geométrica (CERVELIN, 2014). O presente trabalho terá como foco vibrações com comportamentos lineares, portanto, o assunto da não linearidade não será mais abordado.

A análise dinâmica pode ser classificada como análise modal, análise para resposta no tempo ou análise de vibrações randômicas. No primeiro caso, busca-se obter as frequências e modos de vibração do sistema através da solução de problemas de autovalores e autovetores. Em análises de resposta no tempo procura-se a resposta estrutural em um determinado intervalo de tempo, avaliando-se, então, deslocamentos, velocidades e acelerações. Por fim, as vibrações randômicas caracterizam problemas nos quais buscam-se as respostas de estruturas sujeitas a vibrações aleatórias (TORII, 2012).

Sistemas vibratórios podem ser representados por um conjunto de massas, molas e amortecedores. A massa é o meio pelo qual se armazena energia cinética, a mola armazena a energia potencial e o amortecedor é o meio que gera perda de energia (RAO, 2008). A Figura 1 representa um sistema vibratório com deslocamento  $u$  onde  $m$  representa a massa,  $k$  a rigidez,  $c$  o amortecimento e  $p(t)$  a força aplicada.

Figura 1 - Sistema de um grau de liberdade



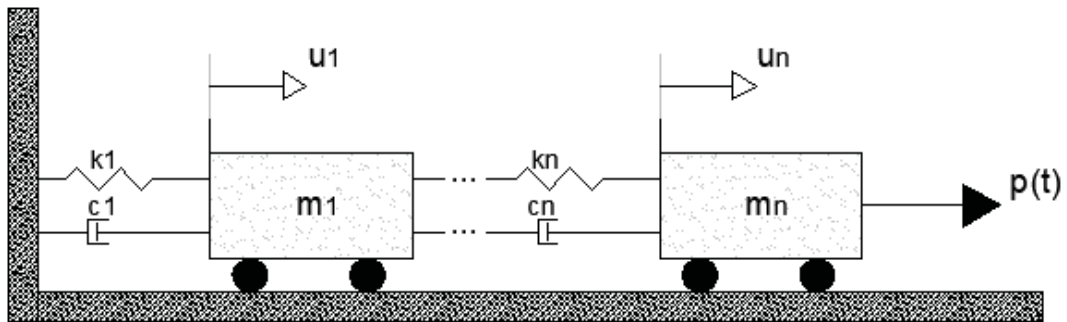
O movimento do sistema apresentado na Figura 1 pode ser representado pela equação:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (1)$$

O sistema vibratório da Figura 1 é um sistema de um único grau de liberdade. Desse modo, pode-se definir a posição de qualquer elemento do sistema com uma única coordenada independente. No entanto, sistemas reais são contínuos, ou seja, possuem infinitos graus de liberdade, e seu comportamento é regido por um conjunto de equações diferenciais ou integrais ordinárias.

Em etapas preliminares de dimensionamento, um modelo de um único grau de liberdade pode ser capaz de aproximar razoavelmente bem o comportamento do sistema vibratório. Entretanto, em etapas mais avançadas de projeto torna-se necessário obter respostas mais precisas. Nesses casos, as estruturas são aproximadas por sistemas de múltiplos graus de liberdade (Figura 2), cujo comportamento passa a ser regido por um conjunto de equações diferenciais parciais (MEIROVITCH, 2001).

Figura 2 - Sistema com múltiplos graus de liberdade



O movimento de sistemas com múltiplos graus de liberdade é representado pela equação:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t) \quad (2)$$

onde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{P}$  são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento, rigidez e o vetor de forças do sistema.

A solução da equação (2) dependerá do amortecimento adotado no problema, uma vez que esse pode ser crítico, supercrítico ou subcrítico. O amortecimento crítico é o valor limite do amortecimento para que o sistema não sofra oscilações. No caso do amortecimento supercrítico o sistema retorna à sua posição neutra sem oscilar e mais rapidamente do que um sistema com amortecimento crítico. Por fim, um sistema com amortecimento subcrítico vibra em torno de sua posição de equilíbrio até retornar à posição neutra (SORIANO, 2009). A relação entre o amortecimento do sistema e seu amortecimento crítico pode ser definida como:

$$\zeta = c/c_{crit} \quad (3)$$

onde  $\zeta$  é o fator de amortecimento,  $c$  é o valor de amortecimento e  $c_{crit}$  é o valor de amortecimento crítico.

O amortecimento em estruturas reais ocorre devido à vários mecanismos que tendem a atuar simultaneamente como, por exemplo, fricção entre elementos estruturais e não estruturais, e abertura e fechamento de microfissuras no concreto.

Em análises matemáticas é conveniente idealizar um amortecimento equivalente que englobe todos os mecanismos atuantes (CHOPRA, 1995). A Tabela 1 apresenta os fatores de amortecimento de diferentes estruturas.

Tabela 1 - Fatores de amortecimento usuais

Tipo de Estrutura	$\zeta$
Edifício até cerca de 100 metros de altura sob ações usuais:	
- Em concreto armado	0,020 - 0,030
- Em aço	0,015 - 0,025
Edifício acima de 100 metros de altura sob ações usuais:	
- Em concreto armado	0,010 - 0,020
- Em aço	0,007 - 0,013
Edifício sob ação sísmica:	
- Até 6 graus da escala Richter	0,020 - 0,050
- A partir de 6 graus na escala Richter	0,050 - 0,100
Os códigos sísmicos costumam recomendar 0,05.	
Passarelas:	
- Em concreto armado	0,008 - 0,020
- Em concreto protendido	0,005 - 0,017
- Em aço	0,002 - 0,004
Pisos para atividades esportivas:	
- Em concreto armado	0,014 - 0,035
- Em concreto protendido	0,010 - 0,030
- Mistos em aço e concreto	0,006 - 0,020

Fonte: SORIANO (2009)

Percebe-se que os fatores de amortecimento apresentados são menores do que um, o que caracteriza as estruturas como subamortecidas. Esse comportamento pode ser observado na maioria das estruturas de interesse na área da construção civil. De acordo com Chopra (1995) as estruturas civis costumam apresentar fatores de amortecimento inferiores à 0,1. Baixos fatores de amortecimento praticamente não influenciam respostas em análises modais. Portanto, para estruturas civis, o amortecimento é, em geral, desprezado quando se buscam obter respostas de frequências e modos naturais de vibração. No presente trabalho os exemplos foram considerados como não amortecidos.

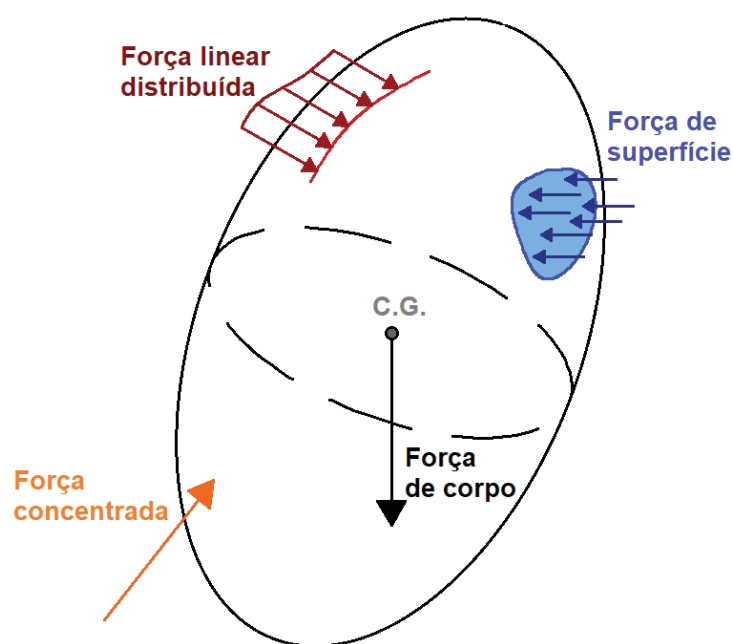


### 3.2 ESTADO PLANO

Todo corpo é formado por um conjunto de moléculas que por sua vez são compostas por conjuntos de partículas subatômicas, de modo que, todo corpo é, em sua essência, um meio descontínuo. Todavia, o comportamento dos materiais pode ser, em muitos casos, previsto através de teorias que desprezam a estrutura molecular. A mecânica do contínuo estuda a resposta dos materiais sob situações de carregamento considerando que corpos são compostos por volumes infinitesimais, chamados de partículas, em cujas vizinhanças sempre existem outras partículas, ou seja, considerando corpos como sendo meios contínuos (LAI; KREMPL; RUBEN, 2010).

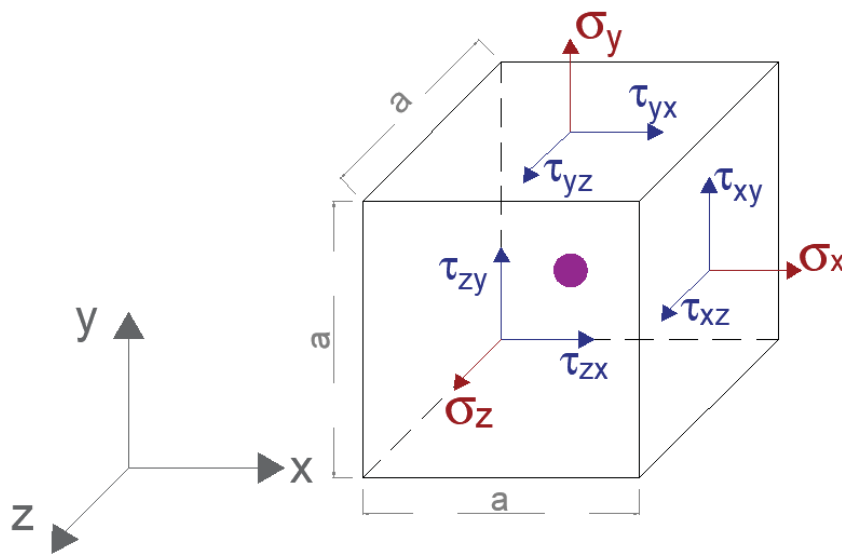
Uma vez que a matéria que compõe um corpo é tomada como sendo continuamente distribuída, as cargas externas que atuam no mesmo podem ser divididas em forças de corpo e forças de superfície. Forças de corpo são aquelas desenvolvidas sem necessidade de contato físico entre corpos, como é o caso da ação da gravidade. Já forças de superfície são aquelas causadas por interação direta entre superfícies de corpos (HIBBELER, 2010). A Figura 3 indica um corpo qualquer submetido a um carregamento genérico proveniente de ambos os tipos de cargas citados.

Figura 3 - Corpo submetido à atuação de forças



Considerando o corpo apresentado, sujeito a um determinado carregamento qualquer, pode-se analisar o estado de tensões atuante em qualquer ponto. A Figura 4 indica um elemento cúbico de lados com dimensão  $a$  cujo ponto central é aquele no qual se desejam analisar as tensões. A adoção de um elemento cúbico infinitesimal para representar um ponto é válida uma vez que as tensões nas suas faces pouco diferem daquelas presentes no ponto central. Além disso, a medida em que os lados do cubo se tornam menores, os erros obtidos tendem a zero (BEER; JOHNSTON, 1995).

Figura 4 - Estado de tensões em um ponto



Através da análise da figura 4 percebe-se que o ponto está sujeito a três componentes de tensões normais  $\sigma_i$  e três componentes independentes de tensões cisalhantes  $\tau_{ij}$ . Assim, o elemento de tensão está sujeito a um estado triplo de tensões, dependente das coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , que pode ser representado pelo vetor:

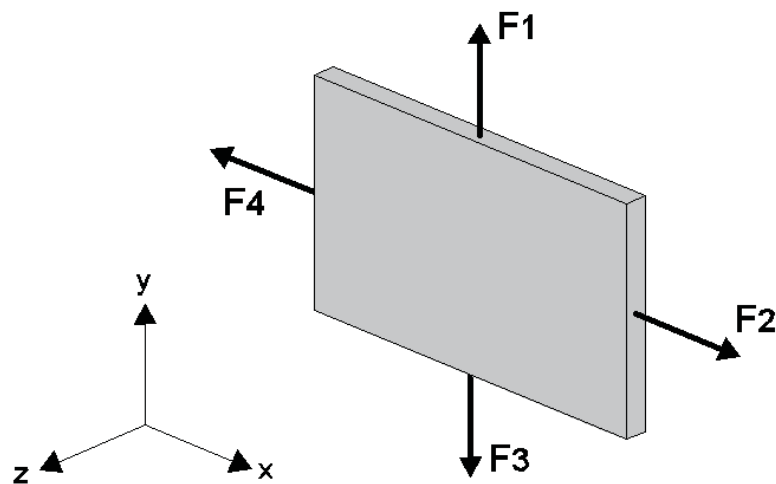
$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T \quad (4)$$

Existe um grupo de problemas da elasticidade denominados problemas de estado plano, no qual os elementos bidimensionais costumam ser encaixados, cujas soluções independem de uma de suas coordenadas. O estado plano pode ser gerado devido a condições da geometria, das cargas externas e/ou das condições de

contorno. Esses casos podem ser divididos em problemas de estado plano de tensões ou de estado plano de deformações (REDDY, 2008).

O estado plano de tensões é aquele no qual todas as componentes de tensão de uma direção específica são nulas (LAI; KREMPL; RUBEN, 2010). Um exemplo desse caso, como indicado na Figura 5, é gerado quando sólidos de espessura  $z$  pequena estão sujeitos a ações externas que atuam somente em sua superfície média plana (plano  $xy$ ).

Figura 5 - Estado plano de tensões



Fonte: Adaptado de GEVINSKI (2010)

Desse modo:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \quad (5)$$

Nesses casos, as variáveis primárias do problema serão os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ , representadas por  $u$  e  $v$ , respectivamente. Tal abordagem pode ser utilizada também em casos onde a espessura do corpo não é pequena. Para isso, entretanto, não podem existir cargas fora do plano  $xy$  e o carregamento presente deve ser constante em toda a espessura (DYM; SHAMES, 2013).

O vetor de deformação de um elemento infinitesimal de um corpo pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T \quad (6)$$

onde  $\varepsilon_i$  representa deformação normal e  $\gamma_{ij}$  deformação cisalhante.

Através da Lei de Hooke obtém-se a seguinte relação entre tensões ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) e deformações ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (7)$$

onde  $\mathbf{D}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  e  $\boldsymbol{\sigma}_0$  são, respectivamente, a matriz de propriedades constitutivas do material e os vetores de deformação inicial e de tensão inicial.

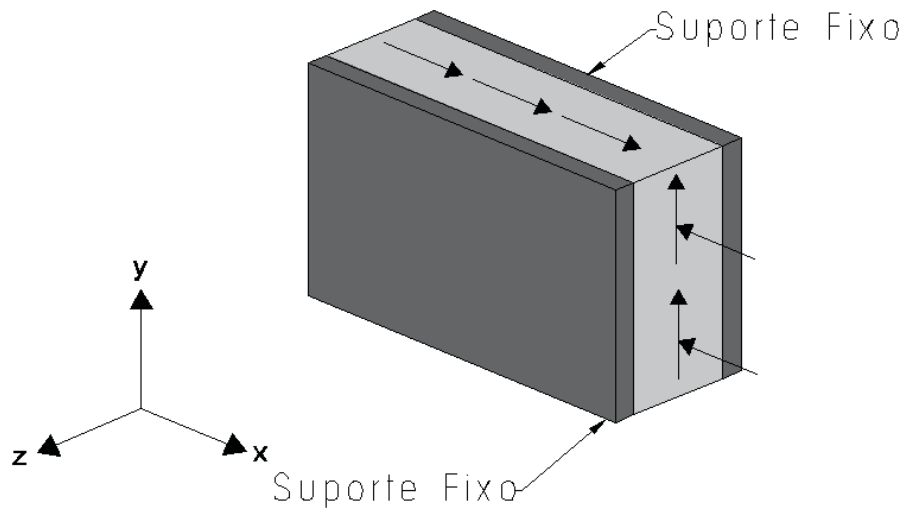
Para o problema de estado plano de tensões, considerando o material como isotrópico, a matriz  $\mathbf{D}$  é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Se o corpo analisado puder ser caracterizado como tendo suas componentes de deformação em uma das direções como nulas, esse pode ser abordado através do estado plano de deformações (REDDY, 2008). A Figura 6 representa uma situação de estado plano de deformações uma vez que a chapa está sujeita a carga uniformemente distribuída e está impedida de deformar ao longo do eixo  $z$  por suportes fixos.

Figura 6 - Estado plano de deformações



FONTE: Adaptado de GEVINSKI (2010)

Nesse caso:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0 \quad (9)$$

Além disso, como o deslocamento ao longo do eixo  $z$  está impedido, assim como no estado plano de tensões, as variáveis primárias serão os deslocamentos  $u$  e  $v$ . Vale ressaltar que no estado plano de deformações a tensão normal no eixo  $z$  não é nula e pode ser obtida através da Lei de Hooke de modo que:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (10)$$

A relação entre tensões e deformações, para o estado plano de deformações, pode ser obtida através da equação (7), no entanto, nesse caso, a matriz de relações constitutivas  $\mathbf{D}$  passa a ser:

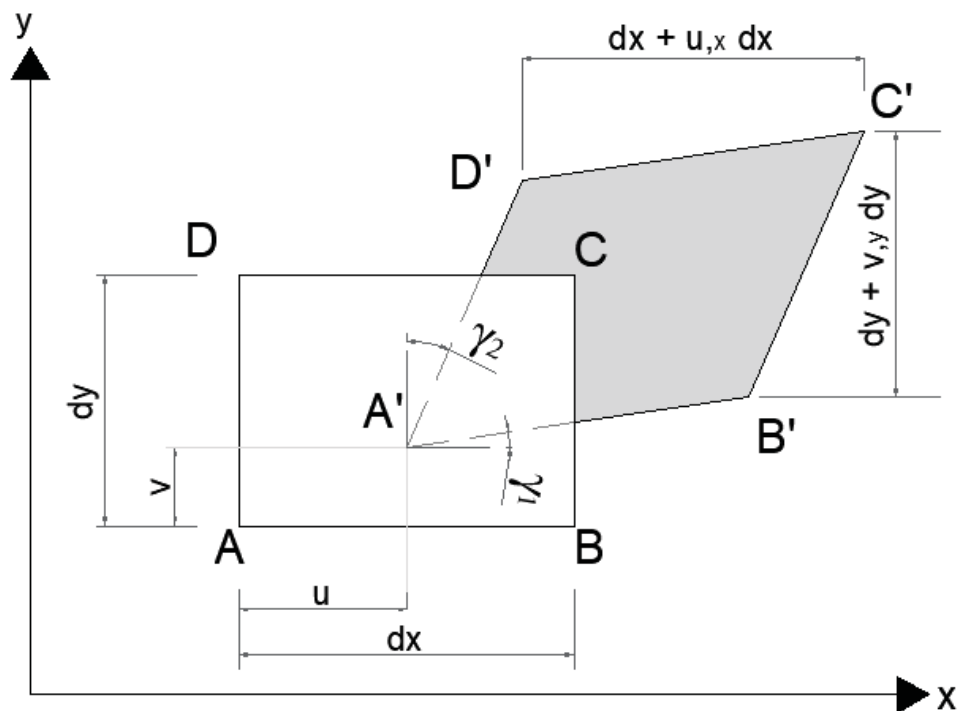
$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

### 3.3 ANÁLISE DINÂMICA BIDIMENSIONAL

Com base nos conceitos apresentados no item 3.1 sobre análise dinâmica e no item 3.2 sobre estado plano é possível formular o problema dinâmico de elementos bidimensionais. O presente tópico abordará a dedução matemática necessária para obtenção da equação de equilíbrio do problema dinâmico bidimensional com base nas etapas apresentadas por Soriano (2009) e Neto (2009).

Inicialmente, é necessário se estabelecer uma relação entre os deslocamentos  $u$  e  $v$ , gerados respectivamente nos eixos  $x$  e  $y$ , e as deformações do corpo. A Figura 7 representa um elemento infinitesimal bidimensional originalmente delimitado por  $ABCD$  que após sofrer deformação passa a ser delimitado por  $A'B'C'D'$ .

Figura 7 - Deformação de um elemento infinitesimal



Na Figura 7,  $u$  e  $v$  são os deslocamentos do ponto A e  $(u_{,x} dx)$  e  $(v_{,y} dy)$  são os incrementos desses deslocamentos. Com base nisso, podem ser determinadas as deformações específicas longitudinais  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$ , assim como a deformação de distorção

$\gamma_{xy}$ . Essas representam, respectivamente, mudanças de comprimento longitudinal e alteração dos ângulos entre as faces do elemento e são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{(dx + u_{,x}dx) - dx}{dx} = u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (12)$$

$$\varepsilon_y = \frac{(dy + v_{,y}dy) - dy}{dy} = v_{,y} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (13)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_2 + \gamma_1 = u_{,y} + v_{,x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (14)$$

Essas relações podem ser escritas em forma de matriz de modo que:

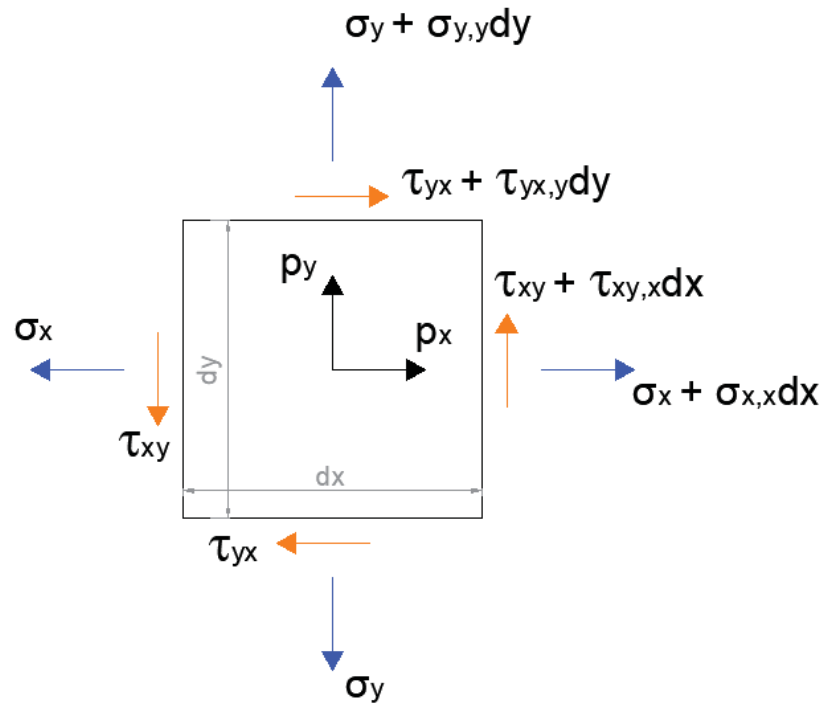
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (15)$$

que também pode ser representado na forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (16)$$

Uma vez analisada a relação entre os deslocamentos e as deformações do elemento deve-se buscar a equação que governa o problema dinâmico. Para isso, é realizado o equilíbrio de um elemento infinitesimal sujeito a um estado plano de tensões. A Figura 8 representa um elemento infinitesimal de dimensões  $dx$  e  $dy$ , sujeito a incrementos infinitesimais de tensões normais  $\sigma$  e cisalhantes  $\tau$  e à ação de forças  $p_x$  e  $p_y$ .

Figura 8 - Equilíbrio de elemento bidimensional infinitesimal



Sabe-se que para o corpo estar em equilíbrio todos os seus pontos também devem estar. Sendo assim, aplicam-se as seguintes condições:

$$\begin{cases} \sum F_x = \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + p_x = 0 \\ \sum F_y = \sigma_{y,y} + \tau_{xy,x} + p_y = 0 \end{cases} \quad (17)$$

que resultam, na forma matricial, em:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ou então:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (19)$$



A equação (19) pode ser reescrita considerando-se as forças de inércia e o amortecimento:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (20)$$

onde  $\rho$  é a massa específica e  $\ddot{\mathbf{u}}$  e  $\dot{\mathbf{u}}$  são os vetores aceleração e velocidade dados por:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

A partir da equação (20) é possível resolver o problema dinâmico de elementos bidimensionais simples considerando o estado plano. No entanto, a medida em que se consideram estruturas mais complexas, mais difícil se torna a representação matemática do problema e a obtenção de soluções analíticas (RAUEN, 2014). Perante tais dificuldades recorre-se a soluções aproximadas. Dentre os métodos aproximados o MEF é o mais utilizado.

#### 4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste na representação de um meio contínuo através de um conjunto de elementos ligados por pontos nodais em seus contornos. Em seguida, funções são adotadas para representar o deslocamento de cada elemento. O conjunto de todos os elementos terá um comportamento similar a estrutura original. Desse modo, uma vez resolvido o problema para cada elemento é possível obter uma solução aproximada para a estrutura como um todo (DESAI; ABEL, 1972).

A formulação do problema através do MEF pode ser realizada pelo Princípio da Mínima Energia Potencial Total (enfoque físico), ou pelo Método de Galerkin (enfoque matemático). O primeiro baseia-se no fato de que a energia potencial total de um sistema assume seu valor mínimo quando o deslocamento satisfaz as condições de equilíbrio e é compatível com as condições de contorno (DESAI; ABEL, 1972). No entanto nem sempre um problema possui formulação variacional, nesses casos pode-se utilizar o Método de Galerkin.

O Método de Galerkin é baseado no Método dos Resíduos Ponderados (MRP). O MRP aproxima as variáveis dependentes do problema por expansões em séries de funções conhecidas, denominadas funções de forma. Uma função aproximadora com  $n$  parâmetros incógnitos pode ser escrita como:

$$u_a = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i \quad (23)$$

onde  $u_a$  é a função aproximada,  $u_i$  são as incógnitas do problema e  $\phi_i$  são as funções de forma.

Se a função aproximada for substituída no problema original, esse não será satisfeito em todo o domínio e resultará em um resíduo ( $R$ ). Portanto, para se obter a solução mais próxima à real, busca-se anular a média ponderada do resíduo no domínio fazendo:

$$\int_{\Omega} w_i R d\Omega = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (24)$$

onde  $w_i$  são as funções peso e  $\Omega$  é o domínio.

O Método de Galerkin consiste em adotar funções peso iguais às funções de forma. As funções de forma geram um espaço que pode ou não conter a solução exata. Se a solução exata não estiver contida no espaço adotado, obtém-se sua projeção nesse espaço (SORIANO, 2009).

Supondo, então, um campo de deslocamentos bidimensional representado por:

$$\mathbf{u} = [u \quad v]^T \quad (25)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o campo de deslocamentos com componentes horizontal e vertical representadas respectivamente por  $u$  e  $v$ . O campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  poderá ser aproximado, como descrito anteriormente, por uma combinação de funções de forma com as incógnitas do problema, os deslocamentos. No entanto, no uso do MEF, essa aproximação é realizada em subdomínios. Desse modo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}^e \quad (26)$$

sendo  $\mathbf{N}$  a matriz das funções de forma e  $\mathbf{u}^e$  o campo de deslocamentos de um elemento do domínio.

Com base em tal aproximação, pode-se obter, respectivamente, os campos aproximados de velocidades  $\dot{\mathbf{u}}$  e acelerações  $\ddot{\mathbf{u}}$  referentes a cada elemento:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}^e \quad (27)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}^e \quad (28)$$

Aplicando-se o Método de Galerkin à equação de equilíbrio que rege o problema bidimensional (Equação (20)) em nível dos subdomínios elementares, obtém-se:

$$\int_V \mathbf{N}^T (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} - \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^e - c \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^e) dV = \mathbf{0} \quad (29)$$

Aplicando-se o Teorema de Green ao primeiro termo da Equação (29), obtém-se:

$$\int_V (-(\mathbf{LN})^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{N}^T (\mathbf{p} - \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^e - c \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^e)) dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} dS = \mathbf{0} \quad (30)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à superfície  $S$ .

Considerando que a tensão em um ponto qualquer é:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DLu} + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (31)$$

e que das condições de contorno sabe-se que:

$$\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{q}} \quad (32)$$

onde  $\bar{\mathbf{q}}$  é o vetor de forças atuantes na superfície  $S$ , a Equação (30) pode ser reescrita como:

$$\int_V ((\mathbf{LN})^T (\mathbf{DLNu}^e + \boldsymbol{\sigma}_0) + \mathbf{N}^T (-\mathbf{p} + \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^e + c \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^e)) dV = \int_S \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{q}} dS \quad (33)$$

Além disso, adotando que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{LN} \quad (34)$$

a Equação (33) passa a ser expressa como:

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}^e + c \mathbf{N}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^e + \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^e) dV \\ = - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV + \int_S \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{q}} dS \end{aligned} \quad (35)$$

Sendo assim, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do problema podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\mathbf{M}^e = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (36)$$

$$\mathbf{C}^e = \int_V c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (37)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (38)$$

Os vetores de forças de tensões iniciais, de volume e de superfície podem ser escritos, respectivamente, como:

$$\mathbf{f}_{\sigma_0}^e = - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV \quad (39)$$

$$\mathbf{f}_p^e = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV \quad (40)$$

$$\mathbf{f}_q^e = \int_S \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{q}} dS \quad (41)$$

Desse modo, o problema de equilíbrio dinâmico bidimensional pode ser representado em função de matrizes e vetores de acordo com:

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}_{\sigma_0}^e + \mathbf{f}_p^e + \mathbf{f}_q^e \quad (42)$$

Uma vez construídas todas as matrizes elementares, essas devem ser agrupadas para gerar as matrizes globais do problema de modo a sobrepor termos referentes aos mesmos deslocamentos nodais. Se no sistema global o amortecimento for desprezado, segundo a justificativa apresentada no item 3.1, e todas as forças atuantes forem representadas por um vetor  $\mathbf{f}$ , o problema passa a ser representado por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (43)$$

onde  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  são respectivamente as matrizes de massa e rigidez globais e,  $\mathbf{u}$  e  $\ddot{\mathbf{u}}$  são os vetores de deslocamentos e acelerações globais.

A equação (43) representa um sistema de  $n$  equações diferenciais lineares de segunda ordem, sendo  $n$  o número de graus de liberdade do problema analisado. Desse modo a solução analítica do problema é dada genericamente por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p \quad (44)$$

ou seja, a solução é composta por uma parcela proveniente da solução homogênea  $\mathbf{u}_h$  e outra advinda da solução particular  $\mathbf{u}_p$ . A solução particular dependerá do tipo de carregamento aplicado na estrutura. A solução homogênea do problema é a resposta do sistema considerando vibração livre, de modo que:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (45)$$

Sabe-se que estruturas sujeitas a vibração livre cujo movimento seja iniciado sob a forma de um de seus modos de vibração possuem comportamentos oscilatórios harmônicos. Portanto, a solução analítica de cada equação ( $\mathbf{u}$ ) pode ser representada por uma função trigonométrica como:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \cos(\omega t) \quad (46)$$

onde  $\omega$  é a frequência natural de vibração e  $t$  é o tempo. Ao substituir a solução da Equação (46) na equação (45), recai-se em um problema de autovalores e autovetores generalizado dado por:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} - \omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (47)$$

onde  $\omega^2$  serão os autovalores e  $\boldsymbol{\phi}$  os autovetores. Destaca-se que os autovalores são reais e os autovetores relativos a dois autovalores diferentes são ortogonais. Um detalhamento de tais propriedades é apresentado por Arndt (2009).

#### 4.1 ANÁLISE TRANSIENTE

A equação (43), que rege o problema de vibração forçada, pode ser solucionada através de métodos de integração numérica direta. Tais métodos subdividem o intervalo de tempo  $t$ , no qual o problema é avaliado, em intervalos de tempo  $\Delta t$  e utilizam fórmulas de recorrência para determinar o valor das variáveis em cada instante de tempo. Quanto menor for o intervalo  $\Delta t$ , mais precisa a solução obtida (CHOPRA, 1995; DEBELLA, 2018). Desse modo, a equação (43) pode ser escrita em função de um tempo qualquer  $t_i$  como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t_i} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t_i} = \mathbf{f}_{t_i} \quad (48)$$

No presente trabalho foi adotado o método de Newmark (NEWMARK, 1959) para solução de problemas de vibração forçada. Nesse, a solução em um instante de tempo  $t_i$  é baseada nas equações:

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + [(1 - \gamma)\Delta t]\ddot{\mathbf{u}}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \quad (49)$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + (\Delta t)\dot{\mathbf{u}}_i + [(0,5 - \beta)(\Delta t)^2]\ddot{\mathbf{u}}_i + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \quad (50)$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros que determinam a estabilidade e acurácia do método. Nesse trabalho foi adotado o método de Newmark aceleração constante ( $\beta = 0,25$  e  $\gamma = 0,5$ ). Tais parâmetros tornam o método incondicionalmente estável.

Desse modo, com base nas equações (48) a (50) e considerando que as condições iniciais de  $\mathbf{u}_0$  e  $\dot{\mathbf{u}}_0$  ou  $\ddot{\mathbf{u}}_0$  são conhecidas o problema pode ser solucionado para qualquer instante de tempo. Algoritmos de implementação do método são detalhados por Bathe (1996) e Chopra (1995). Este último foi utilizado como base no presente trabalho.

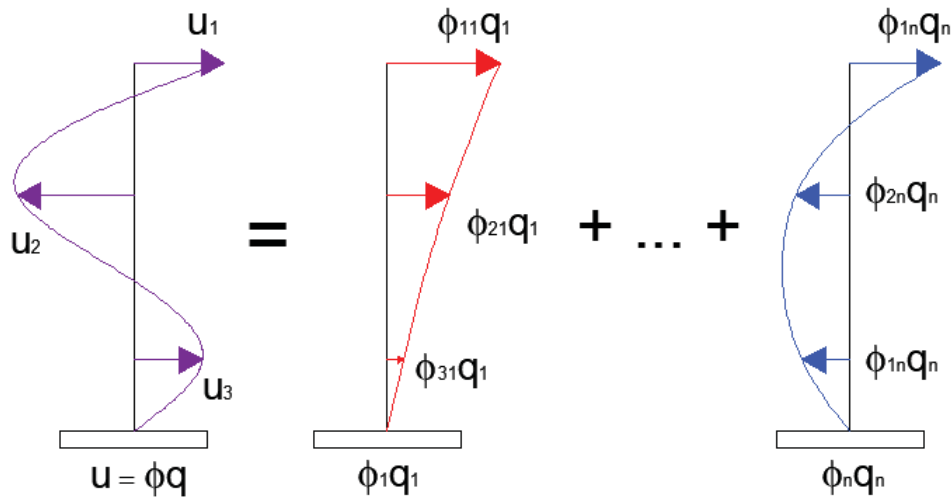
#### 4.1.1 MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL

Quanto maior o número de graus de liberdade de um sistema maior o custo computacional exigido por métodos de integração direta em cada instante de tempo, podendo este crescer ao ponto de inviabilizar a solução (DEBELLA et al., 2019). Nesse contexto, o método da superposição modal se torna uma importante ferramenta na resolução de problemas de vibração forçada.

O Método da Superposição Modal permite, para problemas lineares, transformar um sistema de  $n$  equações acopladas (48) em um sistema de  $n$  equações desacopladas. Simplifica-se, assim, a obtenção da solução pois não é necessário trabalhar com sistemas de equações. Para isso, o método considera que qualquer vibração da estrutura pode ser escrita como uma superposição de seus modos fundamentais (BATHE, 1996; HUGHES, 1987; TORII, 2012). Esses últimos podendo ser obtidos através da análise modal (solução da equação (45)) que resultará em  $n$  pares de frequências e modos naturais ( $\omega_i, \phi_i$ ). Tal conceito é exemplificado na Figura 9.



Figura 9 - Método da Superposição Modal



No Método da Superposição Modal são definidas as matrizes modal e espectral do problema. A matriz modal  $\Phi$  tem suas colunas formadas pelos vetores  $\phi_i$  e a matriz espectral  $\Omega^2$  é uma matriz diagonal com termos  $\omega_i^2$ . Essas são indicadas por:

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] \quad (51)$$

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

O problema de vibração forçada dado pela equação (43) pode então ser escrito da forma:

$$\Phi^T K \Phi q + \Phi^T M \Phi \ddot{q} = \Phi^T f \quad (53)$$

onde  $q$  e  $\ddot{q}$  são, respectivamente, coordenadas generalizadas de deslocamento e aceleração.

Considerando a propriedade de que os autovetores normalizados em relação à matriz de massa são M-ortonormais, tem-se que:

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2 \quad (54)$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (55)$$

e o problema pode ser escrito como:

$$\Omega^2 q + \ddot{q} = P \quad (56)$$

onde:

$$P = \Phi^T f \quad (57)$$

O procedimento de pré e pós multiplicação das matrizes e vetores do problema é na verdade uma transformação de coordenadas dada pela matriz modal. Esse procedimento diagonaliza as matrizes de massa e rigidez originais do problema. Sendo assim, o problema final é dado por um conjunto de equações desacopladas da forma:

$$\omega_i^2 q_i + \ddot{q}_i = P_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (58)$$

A equação (58) pode ser resolvida pelo Método de Newmark, apresentado no item 4.1. Por fim, a solução do problema original é dada por:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i q_i(t) \quad (59)$$

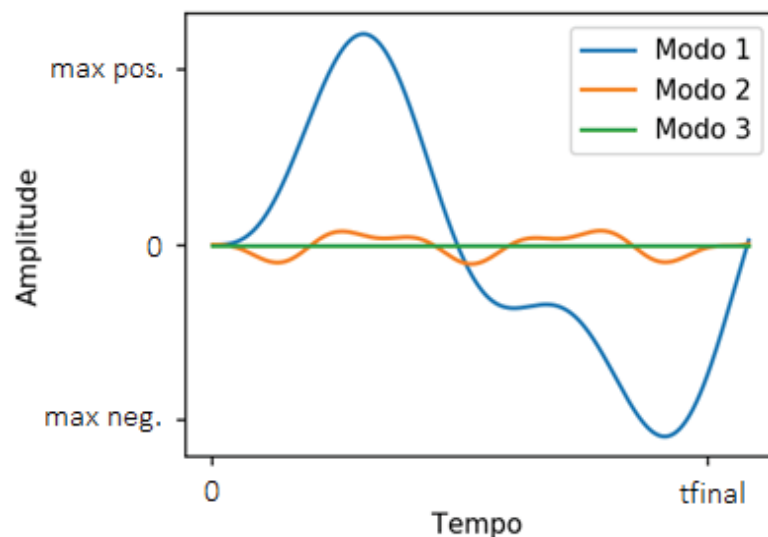
A descrição matemática apresentada neste item foi baseada nos trabalhos de Bathe (1996), Hughes (1987), Torii (2012), Debella (2018) e Debella et al. (2019).

#### 4.1.2 FATOR DE INFLUÊNCIA DOS MODOS DE VIBRAÇÃO

De acordo com Chopra (1995) uma das principais vantagens do Método da Superposição Modal é que não é necessário utilizar todos os modos obtidos na análise modal. É possível, então, avaliar quais modos mais impactam a solução do problema e restringir a superposição a somente esses modos.

Uma maneira de determinar quais modos mais contribuem para a solução do problema é a análise das coordenadas generalizadas de deslocamento. A Figura 10 representa um gráfico da amplitude de diferentes coordenadas generalizadas de um problema genérico.

Figura 10 - Coordenadas generalizadas de deslocamento



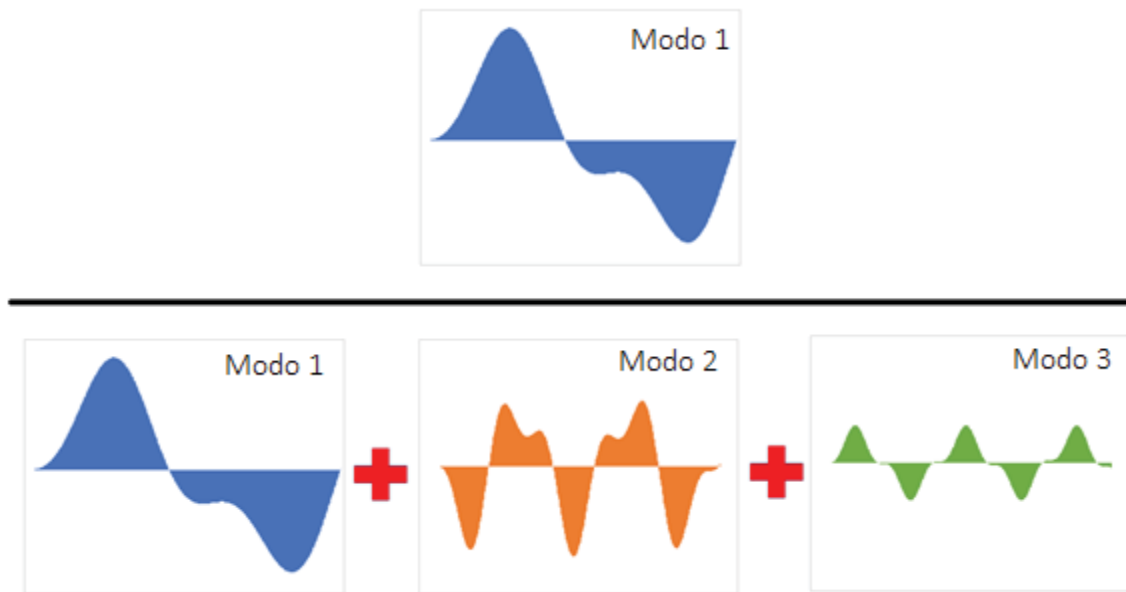
Percebe-se que a influência do 1º modo é muito superior aos demais indicados. Na escala apresentada o 3º modo aparenta não contribuir para o comportamento da estrutura. Sendo assim, Debella (2018) propôs o cálculo de um fator de influência  $F_i$  de uma determinada coordenada generalizada  $q_i$  dado por:

$$F_i = \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{nM} A_j} \quad (60)$$

$$A_i = \sum_{j=1}^m |q_i(j\Delta t)| \Delta t \quad (61)$$

onde  $nM$  é o número total de modos e  $m$  é o número de passos de tempo utilizados na solução do problema. Ou seja, o fator de influência mede a área relativa abaixo do gráfico de uma determinada coordenada em relação à soma das áreas de todas as coordenadas. De modo esquemático o fator de influência do 1º modo da Figura 10 pode ser visualizado na Figura 11. A escala dos gráficos foi modificada para facilitar a visualização.

Figura 11 - Cálculo do fator de influência para o 1º modo



Com base nos fatores de influência Debella (2018) propõe a redução da matriz modal para somente os modos cujos fatores de influência superem o valor de 0,01. Em suas pesquisas (DEBELLA, 2018, DEBELLA et al., 2019) a autora avaliou o uso do fator de influência em problemas unidimensionais de barras e vigas.

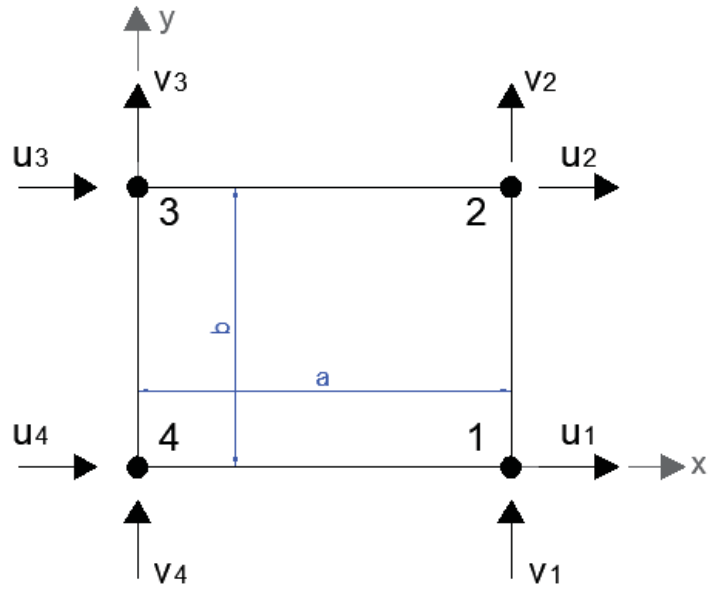
## 4.2 ELEMENTO RETANGULAR DE QUATRO NÓS

Ao se abordar problemas bidimensionais existem várias formas geométricas que podem ser adotadas como elementos finitos e essas interferem diretamente nas funções de forma que podem ser utilizadas. Isso ocorre, pois, as funções de forma dependem da forma do elemento, do número de nós do elemento e do número de graus de liberdade. A escolha do tipo, número e densidade de elementos durante o processo de discretização do domínio está ligada ao problema analisado, à geometria do domínio e à precisão desejada (REDDY, 2006).

Além disso, a escolha das funções de forma deve levar a campos de deslocamentos que sejam completos e conformes para que se garanta convergência do sistema à medida que a malha é refinada. O critério de completude considera o comportamento dos elementos e está relacionado a capacidade do mesmo de representar um deslocamento de corpo rígido e um estado de tensão constante. Já o critério de conformidade considera o sistema global de elementos e exige que as deformadas nas interfaces de elementos adjacentes sejam compatíveis (SORIANO, 2003).

Um elemento que atende aos critérios de completude e conformidade e é comumente utilizado na discretização de problemas bidimensionais de estado plano é o elemento retangular bi linear de quatro nós indicado na Figura 12. Apesar de restringir mapeamentos precisos de geometria e poder levar a problemas de travamento, a simplicidade de tal elemento facilita a implementação de métodos enriquecidos.

Figura 12 - Elemento retangular de quatro nós



O campo de deslocamentos desse elemento é dado por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \alpha \quad (62)$$

que pode ser escrito em função de deslocamentos nodais como:

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (63)$$

e pode ser simplificado de acordo com:

$$\mathbf{u}^e = \psi \alpha \quad (64)$$

Sendo assim pode-se adotar que:

$$\alpha = \psi^{-1}u^e \quad (65)$$

Por fim, conclui-se que:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \psi^{-1}u^e \quad (66)$$

Realizando a multiplicação entre matrizes se obtém:

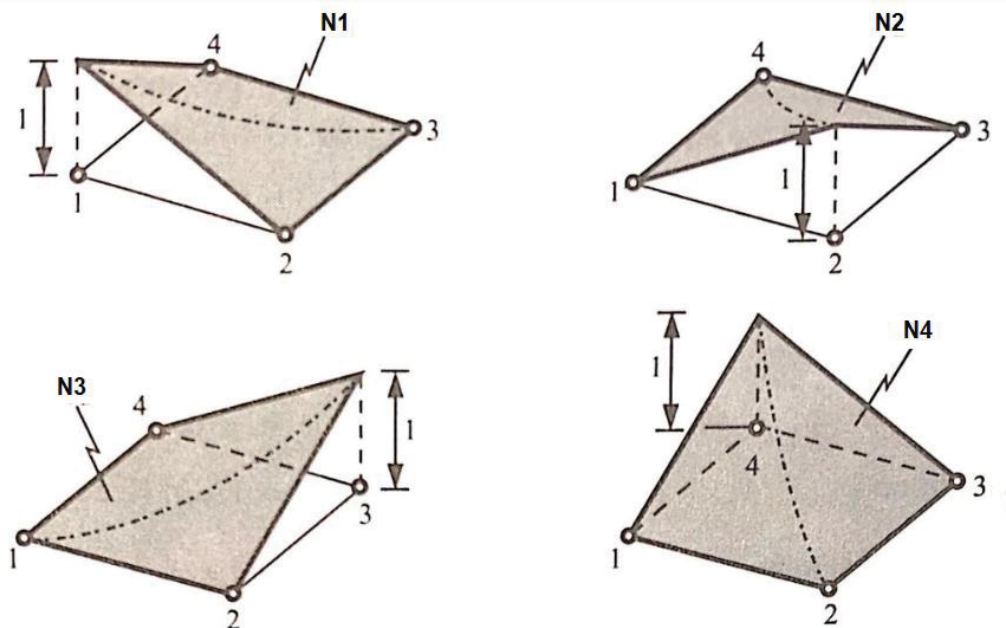
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = Nu^e = \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 \end{bmatrix} u^e \quad (67)$$

onde  $N_i$  representam as funções de forma, que para esse caso são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} N1 = \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} \\ N2 = \frac{xy}{ab} \\ N3 = \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \\ N4 = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} \end{array} \right. \quad (68)$$

O comportamento das funções de forma pode ser observado ao longo do elemento na Figura 13.

Figura 13 - Funções de forma elemento retangular



Fonte: Adaptado de Reddy (2006)

Com base na Figura 13 é possível perceber que cada função possui valor unitário em um nó e é nula nos demais, garantindo desse modo, que os resultados de deslocamentos elementares obtidos são os próprios deslocamentos nodais do problema. Além disso, percebe-se que as funções possuem comportamento linear entre dois nós nas bordas dos elementos, desse modo, garantindo compatibilidade com o elemento adjacente.

Nos exemplos numéricos do presente trabalho, adota-se a definição paramétrica da geometria. Ou seja, a geometria dos elementos é definida através da interpolação das coordenadas nodais. Para esse procedimento são utilizadas as funções de forma apresentadas no presente item (Figura 13). O detalhamento de elementos paramétricos é apresentado por Irons (1966).

#### 4.3 REFINAMENTO HIERÁRQUICO EM ELEMENTOS QUADRILATERAIS

A solução do problema dinâmico bidimensional, após serem definidos os elementos e as funções de forma, é reduzida a uma sequência de operações matemáticas que podem ser resolvidas sem necessidade de um correto entendimento



do fenômeno analisado. Esse fato torna possível que, com a inserção das funções de forma, rotinas computacionais possam ser programadas para resolver uma ampla gama de problemas. No entanto, não é possível substituir a avaliação humana necessária para entender e escolher quais as funções de forma que mais se adequam a um determinado problema. É na escolha dessas, que muitas vezes se encontra a possibilidade de simplificação e garantia de confiança em um resultado (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

Dentre as maneiras de se obterem resultados mais precisos com o MEF, os refinamentos  $h$  e  $p$  são as mais comuns. No refinamento  $h$  a malha é refinada, no entanto, como os coeficientes das matrizes que definem o problema dependem dos tamanhos e limites dos elementos, cada etapa de refinamento exige que sejam recalculados todos os termos das matrizes. Já o refino  $p$  consiste em modificar as funções de forma utilizadas (CAMPION; JARVIS, 1996).

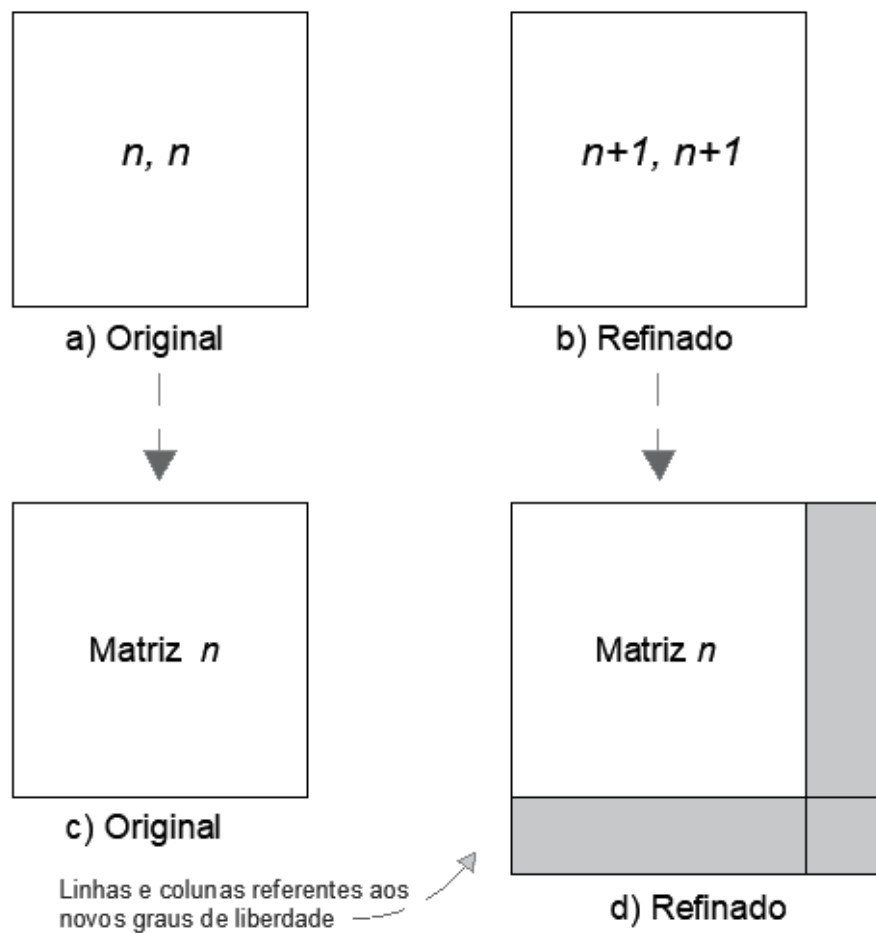
O refino  $p$  tradicional é realizado de modo que cada nova etapa de refinamento exige um novo conjunto de funções diferentes das utilizadas no passo anterior. Com o aumento do grau das funções utilizadas, surgem novos graus de liberdade no interior do elemento. No entanto, o número de novos graus de liberdade gerados a cada nível de refinamento costuma ser inferior ao número gerado pelo refino  $h$ . Todavia, isso não garante melhor eficiência computacional pois apesar de levar a um menor número de variáveis, o esforço necessário para montagem das matrizes de cada elemento aumenta (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

É na busca por aproveitar as vantagens do refino  $p$  ao mesmo tempo em que se reduz o custo computacional necessário que surge o refinamento hierárquico. O Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) consiste em adotar funções de forma de modo que para uma aproximação de ordem  $n+1$  não sejam alteradas as funções de ordem  $n$  adotadas na aproximação anterior (OLIVEIRA, 1993).

Para melhor visualizar tal característica, baseado no trabalho de Solin et al. (2010), a Figura 14(a) representa um elemento bidimensional originalmente modelado com funções de interpolação de grau  $n$  nas duas direções. Já a Figura 14(b) representa esse mesmo elemento após aplicação de um refinamento hierárquico que eleve em um grau o nível das funções de forma.

Após aplicação do refinamento o problema passa a ser regido por um novo conjunto de matrizes. No entanto, como no processo hierárquico o espaço de aproximação de ordem  $n$  está contido no de ordem  $n+1$ , essas novas matrizes são obtidas acrescentando linhas e colunas, referentes aos novos graus de liberdade gerados pelo processo de refinamento, às matrizes originais. Desse modo, as matrizes de grau  $n$  são submatrizes das matrizes de grau  $n+1$ . Tal procedimento é exemplificado pela Figura 14 (c) e (d).

Figura 14 - Refino hierárquico

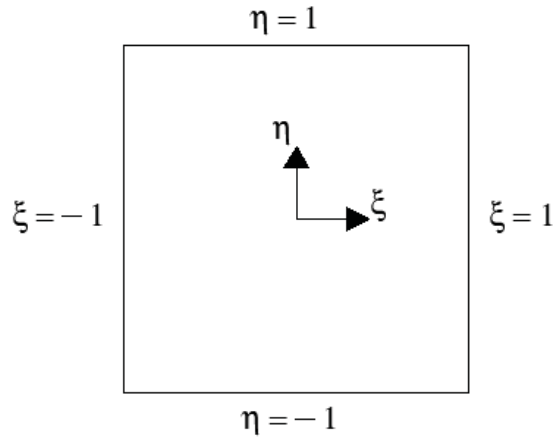


Fonte: Adaptado de SOLIN et al. (2010)

Funções de interpolação hierárquicas bidimensionais podem ser obtidas pela multiplicação de funções unidimensionais. Para tal procedimento comumente adotam-

se coordenadas naturais normalizadas  $(\xi, \eta)$  baseadas em um par de eixos adimensional com origem no centro do elemento, como indicado na Figura 15.

Figura 15 - Elemento normalizado



Desse modo, seguindo a dedução apresentada por Soriano (2003), as funções de forma do elemento podem ser escritas multiplicando duas funções unidimensionais  $l$ , de acordo com:

$$N_i = l_j(\xi)l_k(\eta) \quad (69)$$

onde  $N_i$  é a função de interpolação de um ponto nodal  $i$  com numeração  $j$  no eixo  $\xi$  e  $k$  no eixo  $\eta$ .

Existem diversas famílias de funções hierárquicas que podem ser empregadas nesse procedimento, e podem-se citar as de Lagrange, Legendre e Chebyshev como as mais comuns. A escolha das funções cabe a quem analisa o problema, no entanto, além da facilidade de aplicação, dois fatores costumam ganhar destaque: a precisão dos resultados e o condicionamento das matrizes.

Quanto ao critério de precisão, as bases hierárquicas mencionadas levam a valores iguais e, portanto, todas podem ser adotadas. No entanto, quanto ao número de condição, diretamente ligado à estabilidade do método, os polinômios de Legendre levam aos melhores resultados, ou seja, menores números de condição. Já os

polinômios de Lagrange levam aos piores resultados quando se considera tal critério. No uso desses últimos é recomendado que se combine o refino  $h$  e  $p$ , uma vez que é sabido que o aumento do nível de refinamentos do tipo  $p$  agrava o problema de condicionamento (EDGAR, SURANA, 1996).

Com base em tais critérios, o refinamento hierárquico pode ser aplicado com utilização dos polinômios de Lobatto (Figura 16). Esses são resultantes da integração dos polinômios de Legendre e quando representados em um domínio  $\Omega = [-1,1]$  apresentam a seguinte forma:

$$l_0(x) = \frac{1-x}{2} \quad (70)$$

$$l_1(x) = \frac{1+x}{2} \quad (71)$$

$$l_k(x) = \frac{1}{\|L_{k-1}\|_2} \int_{-1}^x L_{k-1}(\xi) d\xi, \quad 2 \leq k \quad (72)$$

onde:

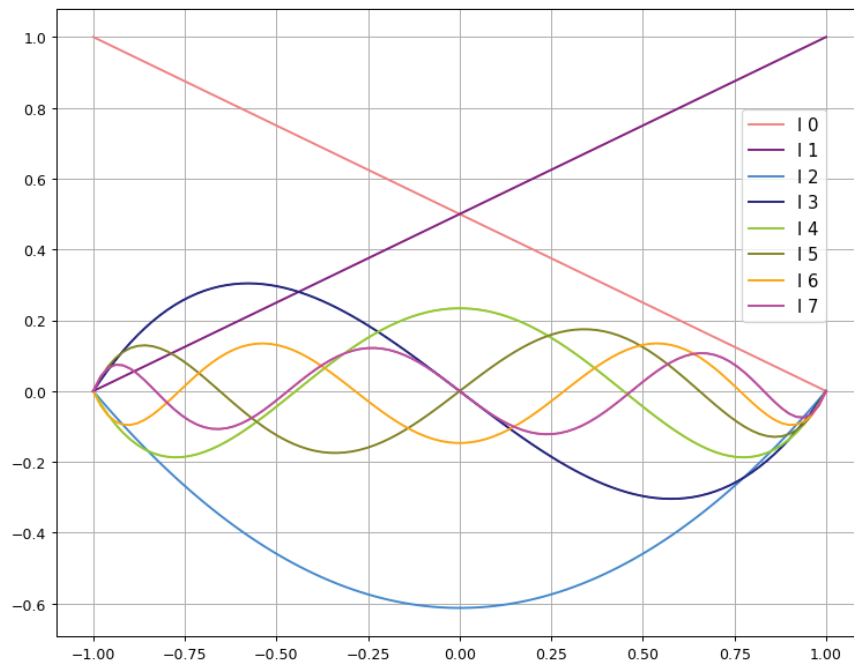
$$L_0(x) = 1 \quad (73)$$

$$L_1(x) = x \quad (74)$$

$$\|L_{k-1}(x)\|_2 = \int_{-1}^1 L_{k-1}^2(x) dx = \sqrt{2/(2k-1)} \quad (75)$$

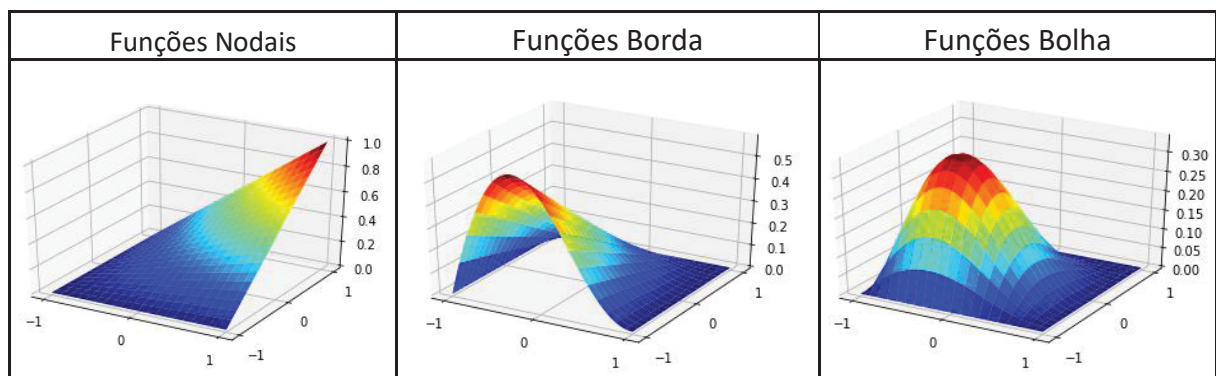
$$L_k(x) = \frac{2k-1}{k} x L_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} L_{k-2}(x), \quad k \geq 2 \quad (76)$$

Figura 16 - Polinômios de Lobatto



A medida em que se aumenta o grau das funções utilizadas surgem nos elementos bidimensionais funções do tipo borda e do tipo bolha, além das funções nodais originais. Funções do tipo bolha são não nulas somente no interior do elemento. Já funções do tipo borda são não nulas no interior e em uma das faces do elemento. Tais funções são exemplificadas na Figura 17 (SOLIN et al., 2004).

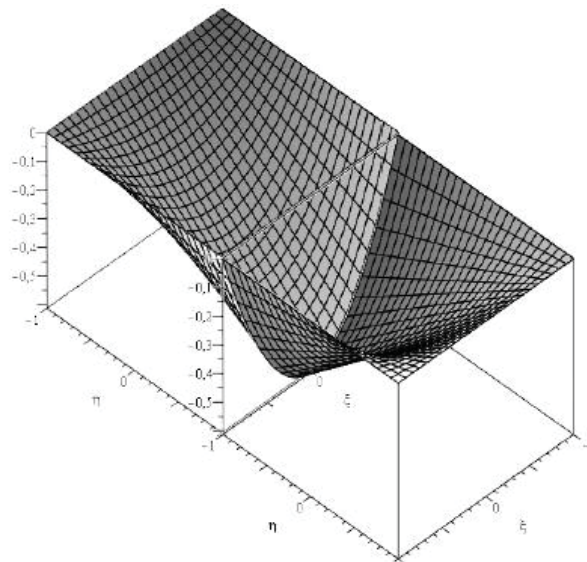
Figura 17 - Tipos de função de aproximação



As funções de aproximação podem ser incluídas no elemento independentemente uma da outra. O cuidado que deve ser tomado no caso de inserção de funções distintas a elementos adjacentes é de que seja mantida a

conformidade da aproximação. Ou seja, funções borda de elementos adjacentes devem estar relacionadas a um único grau de liberdade de campo, gerado pelo refinamento, como indicado pela Figura 18 (TORII, 2012).

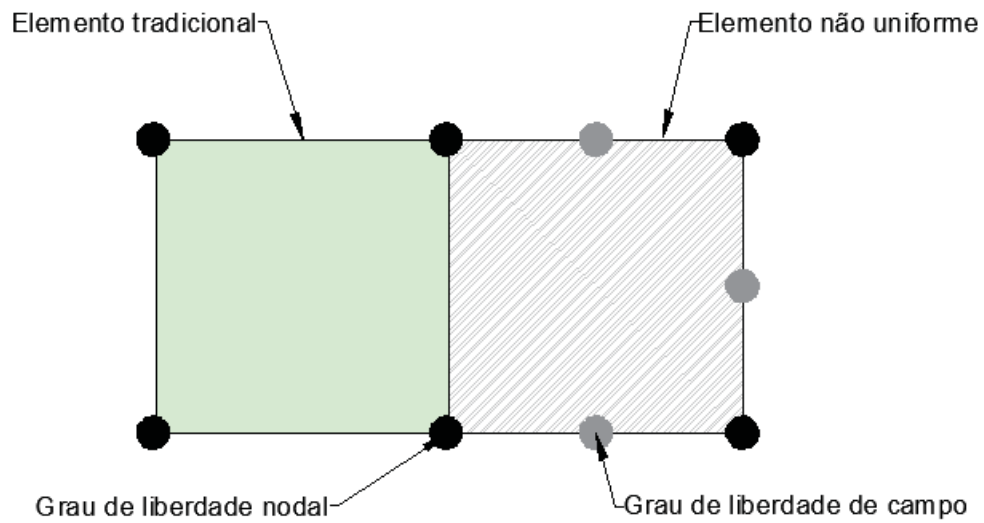
Figura 18 - Conformidade de elementos adjacentes



Fonte: TORII (2012)

Uma maneira de refinar um elemento sem necessidade de repetir o procedimento em elementos adjacentes é gerar elementos com diferentes números de graus de liberdade em seus lados. Esse tipo de procedimento gera elementos conhecidos como não uniformes (Figura 19) e é mais facilmente implementado com uso de funções hierárquicas (SORIANO, 2003). Quando elementos não uniformes são utilizados para realizar a transição entre um elemento refinado e outro não refinado esses são usualmente conhecidos como *blending elements* ou elementos de transição.

Figura 19 - Elemento não uniforme



Uma maneira de se evitar a necessidade de tais elementos é a realização do refinamento com uso exclusivo de funções bolha. Essas geram graus de liberdade de campo somente no interior do elemento refinado e, portanto, não exigem compatibilização com elementos adjacentes.

## 5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

A dependência das funções polinomiais de interpolação do tipo de elemento utilizado e da geometria do mesmo no MEF tradicional, como evidenciado no capítulo 4, pode ser entendida como uma das principais limitações do método. Isso porque quando são abordados problemas que impliquem em grande distorção da geometria dos elementos, a resolução através do MEF tradicional torna-se ineficaz (TORRES, 2008).

Uma das maneiras de aprimorar as respostas obtidas é a inserção de informações particulares nas formulações utilizadas. Essa é a ideia central dos métodos conhecidos como enriquecidos, grupo ao qual pertence o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). O MEFG, baseado no Método da Partição da Unidade (MPU), pode ser entendido como um Método de Galerkin onde os espaços de aproximação são escolhidos de modo a refletirem informações disponíveis sobre a solução da equação que rege o problema (ARNDT, 2009).

### 5.1 MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE

O Método da Partição da Unidade (MPU) é um método alternativo ao MEF para geração de espaços de aproximação que permite que as funções de base sejam escolhidas de acordo com o problema analisado, não sendo, então, necessariamente polinomiais (TORII, 2012). As bases do MPU são apresentadas no presente item com base nos conceitos introduzidos por Melenk e Babuska (1996) e Duarte, Babuska e Oden (2000) e apresentados nos trabalhos de Arndt (2009), Liu (2010), Torii (2012), Debella (2018) e Corrêa (2019).

A partição da unidade (PU) é formada por um conjunto de funções cuja soma é unitária em todos os pontos do suporte. Ou seja, um determinado conjunto de funções de forma  $\phi_i$  formam uma partição da unidade quando:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1, \quad x \in \Omega \quad (77)$$

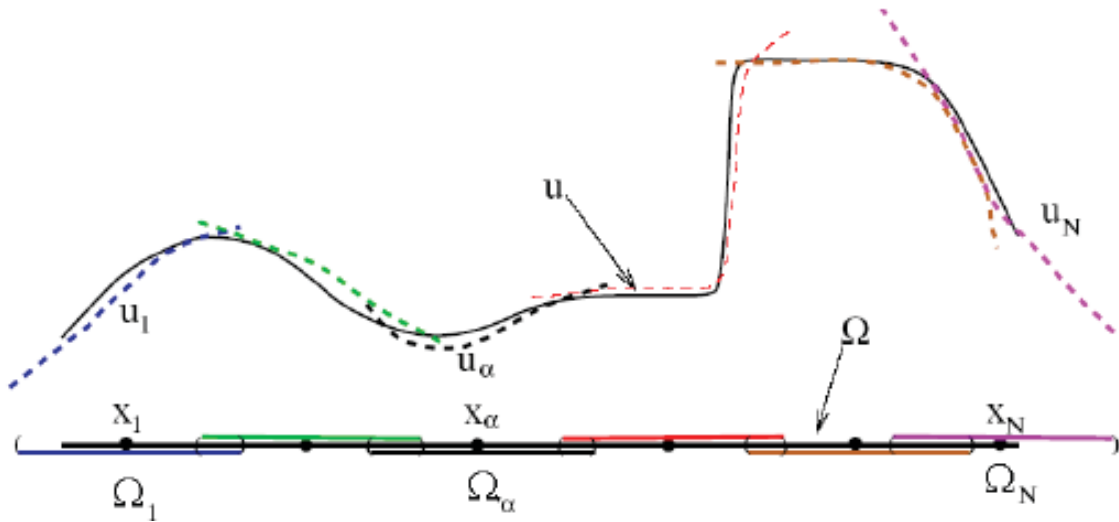


Seja  $\Omega \subset R^n$  um conjunto aberto e  $\{\Omega_i\}$  uma subcobertura aberta de  $\Omega$  que satisfaça a condição de sobreposição em cada ponto:

$$\exists M \in N \text{ tal que } \forall x \in \Omega \quad \text{card}\{i|x \in \Omega_i\} \leq M \quad (78)$$

onde o parâmetro  $M$  controla o número de subcoberturas  $\Omega_i$  que se sobrepõe em qualquer ponto. Ou seja, para todo  $x$  pertencente ao domínio a quantidade  $i$  de subcoberturas às quais  $x$  pertence é menor ou igual a um número natural  $M$ . A Figura 20 representa a definição das subcoberturas  $\{\Omega_i\}$  em um domínio  $\Omega$ .

Figura 20 - Aproximação local através de subcoberturas  $\{\Omega_i\}$



Fonte: Adaptado de DUARTE; BABUSKA; ODEN (2000).

Seja, ainda,  $\{\eta_i\}$  uma partição da unidade subordinada à subcobertura  $\{\Omega_i\}$  que seja não nula somente dentro da subcobertura a qual está relacionada, de modo que:

$$\text{sup}(\eta_i) = \{x \in \Omega | \eta_i(x) \neq 0\} \subset [\Omega_i], \quad \forall_i \quad (79)$$

onde  $\text{sup}(\eta_i)$  é o suporte da função  $\eta_i$  e  $[\Omega_i]$  o fechamento da subcobertura  $\Omega_i$ . Ou seja, todos os pontos onde  $\eta_i(x) \neq 0$  estão contidos em  $\Omega_i$ . Além disso, a partição da unidade deve ser limitada e possuir derivada limitadas:

$$\|\eta_i\|_{L^\infty(R^n)} \leq C_\infty \quad (80)$$

$$\|\nabla \eta_i\|_{L^\infty(R^n)} \leq \frac{C_G}{\text{diâm}\Omega_i} \quad (81)$$

onde  $C_\infty$  e  $C_G$  são constantes. Assim,  $\{\eta_i\}$  é uma partição da unidade  $(M, C_\infty, C_G)$ .

Com base nos conceitos apresentados em relação à partição da unidade, Melenk e Babuska (1996) definem o espaço de aproximação do MPU. O espaço global de aproximação  $S$  utilizado para aproximar  $u$  é dado por:

$$S := \sum_i \eta_i S_i = \left\{ \sum_i \eta_i s_i^j \mid s_i^j \in S_i \right\} \subset H^1 \quad (82)$$

considerando que para cada subdomínio  $\Omega_i \cap \Omega$   $u$  pode ser bem aproximado por um espaço de funções  $S_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$ , onde  $H^1$  é o espaço de Hilbert. Desse modo, a solução aproximada  $u_h$  em um ponto  $x$  é dada por:

$$u_h(x) = \sum_i \sum_{s_i^j \in S_i} \eta_i s_i^j(x) a_{ij} \quad (83)$$

sendo  $a_{ij}$  os graus de liberdade. Por fim, se em cada subcobertura  $\Omega_i \cap \Omega$ ,  $u$  for aproximado por  $s_i^j \in S_i$  de modo que:

$$\|u - s_i^j\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_1(i) \quad (84)$$

$$\|\nabla(u - s_i^j)\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_2(i) \quad (85)$$

ou seja, se em cada subdomínio onde  $u$  pode ser aproximado por  $s_i^j$  a distância  $\|u - s_i^j\|$  for pequena, então globalmente a diferença  $\|u - u_h\|$  será pequena e limitada. Sendo assim, a aproximação (83) satisfaz:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{M} C_\infty \left( \sum_i \varepsilon_1^2(i) \right)^{1/2} \quad (86)$$

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2M} \left( \sum_i \left( \frac{C_G}{\text{diâm}\Omega_i} \right)^2 \varepsilon_1^2(i) + C_\infty^2 \varepsilon_2^2(i) \right)^{1/2} \quad (87)$$

Desse modo, o espaço do MPU será similar ao espaço de base e, portanto, o espaço  $S$  herda as propriedades dos espaços locais  $S_i$ , a suavidade da PU e é conforme (ARNDT, 2009).

De modo resumido o MPU consiste em definir subcoberturas que cubram parte do domínio analisado de modo que todas juntas cubram todo o domínio. Essas formam, então, a base usada para aproximar a resposta no domínio. Isso é feito de modo que todo ponto do domínio seja coberto por um número finito de subcoberturas e não seja coberto simultaneamente por todas as subcoberturas. Além disso, as funções subordinadas às subcoberturas têm soma unitária no domínio e são, assim como suas derivadas, limitadas. No entanto, as exigências em cima das derivadas são menores do que na própria função.

Partições da unidade podem ser construídas com base em diferentes grupos de funções, como por exemplo, polinômios de Lagrange, polinômios de Lobatto, polinômios racionais e funções trigonométricas, dentre outros (WEINHARDT, 2016). O presente trabalho focará no uso dos polinômios de Lagrange como funções partição da unidade.

A partição da unidade baseada nos polinômios de Lagrange, segundo Weinhardt (2016), possui a vantagem de ser facilmente construída e de ser

consagrada em implementações de MEF. Com base na definição apresentada por Soriano (2003), um polinômio de Lagrange  $l$  de ordem  $(m-1)$  de valor unitário em um nó elementar  $i$  e nulo nos demais nós  $j$ , escrito em relação à coordenada  $\xi$  é dado por:

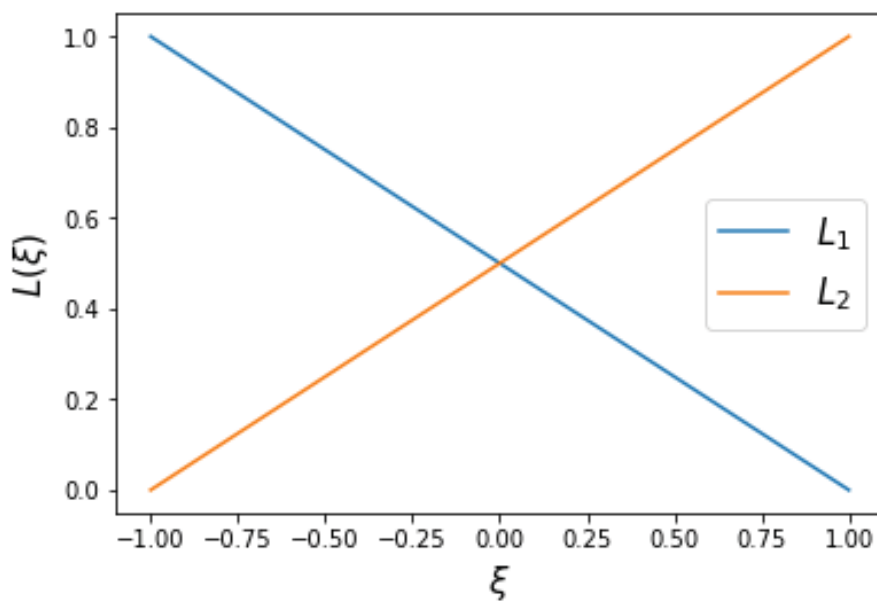
$$L_i^{m-1}(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (88)$$

Desse modo, a partição linear em um domínio  $[-1,1]$  obtida pelos polinômios de Lagrange (Figura 21) é dada por:

$$L_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad (89)$$

$$L_2 = \frac{1 + \xi}{2} \quad (90)$$

Figura 21 - Partição da Unidade Lagrangeana



## 5.2 FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO

De maneira geral, o MEFG pode ser definido como uma combinação do MEF com o Método da Partição da Unidade (MPU) de modo que a solução proposta é dada genericamente por:

$$u^e = u^e_{MEF} + u^e_{ENR} \quad (91)$$

onde  $u^e_{MEF}$  é a parcela advinda do MEF relacionada aos graus de liberdade nodais e  $u^e_{ENR}$  é a parcela advinda do enriquecimento gerado pela partição da unidade relacionada aos graus de liberdade de campo (ou graus de liberdade não nodais). A primeira parcela, em concordância com o definido no item 4 pela Equação (23), é dada por:

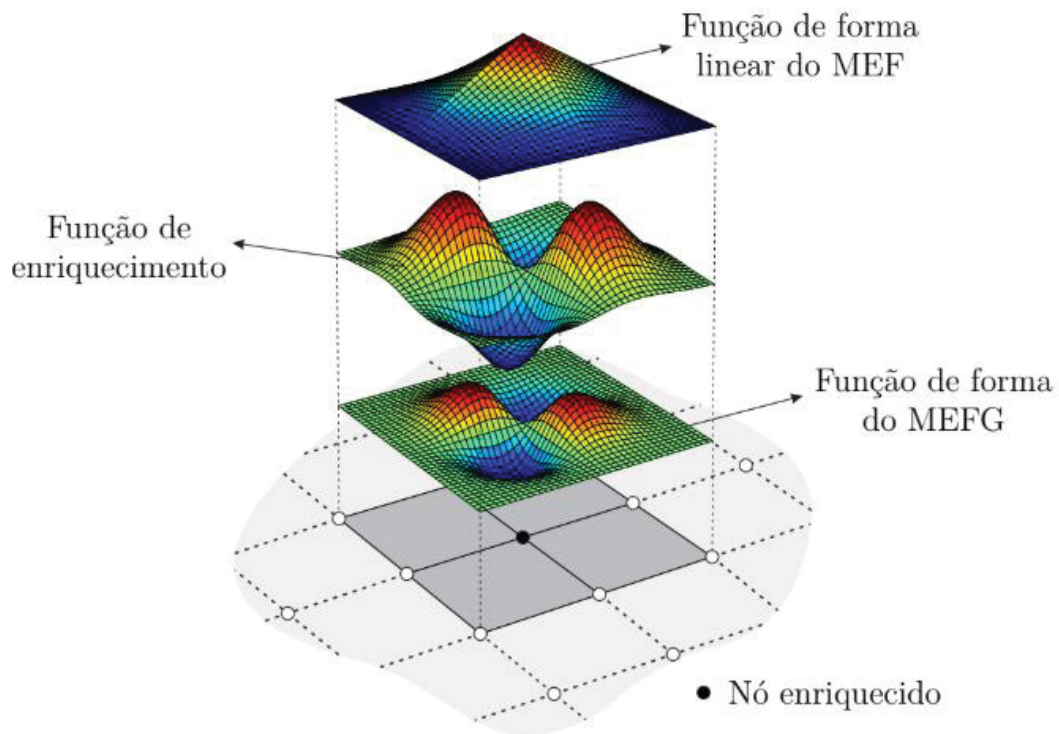
$$u^e_{MEF} = \sum_{i=1}^n u_i L_i \quad (92)$$

sendo  $n$  o número de funções relacionadas aos graus de liberdade nodais,  $u_i$  os graus de liberdade nodais e  $L_i$  as funções de forma partição da unidade. Já a segunda parcela, de acordo com Corrêa (2019) é dada por:

$$u^e_{ENR} = \sum_{i=1}^2 L_i \left( \sum_{j=1}^{nl} \Phi_{ij} a_{ij} \right) \quad (93)$$

onde  $L_i$  são as funções partição da unidade,  $nl$  é o número de níveis de enriquecimento,  $\Phi_{ij}$  são as funções de enriquecimento e  $a_{ij}$  são os graus de liberdade de campo. Essa construção de função de forma através de uma combinação da partição da unidade com a função de enriquecimento é exemplificada pela Figura 22.

Figura 22 - Construção função de forma enriquecida



Fonte: RAMOS (2019)

Funções de enriquecimento devem ser escolhidas de modo a representar o comportamento esperado da solução. Diversos grupos de funções podem ser utilizados como enriquecimentos, no entanto, cada tipo apresentará vantagens diferentes. Enquanto características como trincas e vazios serão melhor representadas com o uso de enriquecimentos de funções descontínuas, respostas dinâmicas são melhor modeladas através de enriquecimentos trigonométricos capazes de modelar mais precisamente sua natureza oscilatória (DEBELLA, 2018; ARNDT, 2009).

Funções de enriquecimento trigonométricas foram utilizadas e levaram a resultados bastante precisos em trabalhos como os de Arndt (2009), Torii (2012), Weinhardt (2016), Petroli (2016), Debella (2018), Malacarne (2018) e Corrêa (2019). Nesse estudo são utilizadas as funções de forma enriquecidas apresentadas por Torii (2012), inicialmente propostas por Arndt (2009), que escritas para um elemento mestre linear de dois nós são dadas por:

$$u^e_{ENR} = \sum_{i=1}^2 L_i(\xi) \left( \sum_{j=1}^{nl} (\gamma_{ij}(\xi) a_{ij} + \varphi_{ij}(\xi) b_{ij}) \right) \quad (94)$$

sendo  $L_i$  as funções partição da unidade, nesse trabalho adotadas como polinômios lineares de Lagrange e,  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  os graus de liberdade de campo associados, respectivamente, às funções de enriquecimento  $\gamma_{ij}$  e  $\varphi_{ij}$  dadas por:

$$\gamma_{1j} = \sin\left(\frac{\beta_j(\xi + 1)}{2}\right) \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (95)$$

$$\gamma_{2j} = \sin\left(\frac{\beta_j(\xi - 1)}{2}\right) \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (96)$$

$$\varphi_{1j} = \cos\left(\frac{\beta_j(\xi + 1)}{2}\right) - 1 \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (97)$$

$$\varphi_{2j} = \cos\left(\frac{\beta_j(\xi - 1)}{2}\right) - 1 \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (98)$$

onde  $\beta_j$  é um parâmetro de enriquecimento hierárquico proposto por Arndt (2009) que envolve propriedades materiais do problema analisado ( $\rho$  e  $E$ ). Esse parâmetro foi modificado por Torii (2012) para conter também o comprimento  $L_e$  do elemento finito e é dado por:

$$\beta_j = \sqrt{\frac{\rho}{E}} L_e \lambda_j \quad (99)$$

onde  $\lambda_j$  é a frequência associada ao nível  $j$  de enriquecimento. O parâmetro  $\beta_j$  pode ser simplificado de acordo com:

$$\beta_j = j\pi \quad (100)$$

Alguns dos valores prescritos para esse parâmetro encontrados na literatura são:  $\beta_j = \frac{3\pi}{4}$ ;  $\pi$ ;  $\frac{3\pi}{2}$ ;  $\frac{5\pi}{2}$ ;  $2\pi$ . Um estudo aprofundado da escolha do parâmetro  $\beta_j$  foi realizado por Weinhardt (2016) que propôs uma modificação heurística do mesmo de modo a aumentar a estabilidade do método. Ou seja, foram testadas diferentes regras de formação para  $\beta_j$  e adotou-se aquela que levou à um espaço de aproximação com maior estabilidade. O autor propôs a adoção de:

$$\bar{\beta}_j = \left[ 2(j-1) + \frac{\beta_1}{\pi} \right] \pi \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, nl \quad (101)$$

As funções de base para o enriquecimento indicadas pelas Equações (95) a (98) foram obtidas a partir da solução fundamental da equação que governa o problema de vibração de uma barra e manipuladas de modo a facilitar a imposição de condições de contorno de deslocamentos prescritos. Desse modo, elas incluem características do comportamento esperado na solução arbitrada e garantem que a solução apresente continuidade global (ARNDT, 2009).

Sendo assim, para obter as funções enriquecedoras do MEFG, as funções trigonométricas de base (Eq. (95) a (98)) são multiplicadas pelas PU indicadas pelas Equações (89) e (90). Respeitando o lado de subcobertura ao qual se referem, tal combinação resulta em:

$$G_{1j} = \frac{1-\xi}{2} \left[ \sin \left( \frac{\beta_j(\xi+1)}{2} \right) \right] \quad (102)$$

$$G_{2j} = \frac{1-\xi}{2} \left[ \cos \left( \frac{\beta_j(\xi+1)}{2} \right) - 1 \right] \quad (103)$$



$$G_{3j} = \frac{1 + \xi}{2} \left[ \sin \left( \frac{\beta_j(\xi - 1)}{2} \right) \right] \quad (104)$$

$$G_{4j} = \frac{1 + \xi}{2} \left[ \cos \left( \frac{\beta_j(\xi - 1)}{2} \right) - 1 \right] \quad (105)$$

Tais funções para diferentes valores de  $\beta_j$  são indicadas pelas Figura 23 e Figura 24.

Figura 23 - Funções enriquecidas com  $\beta = \pi$

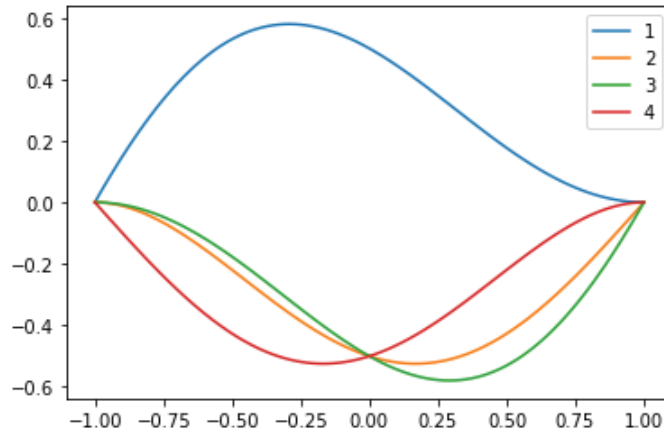
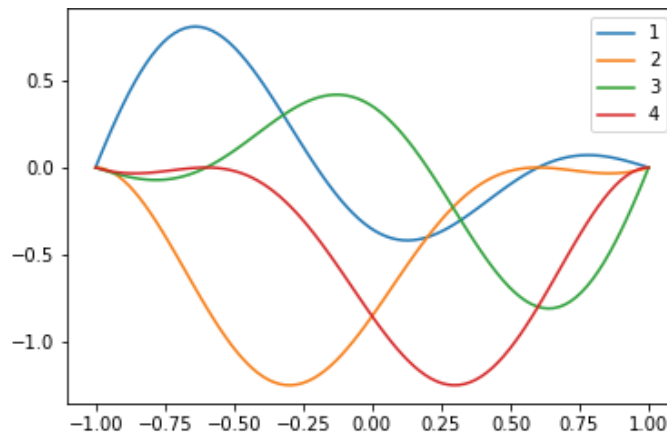


Figura 24 - Funções enriquecidas com  $\beta = 5\pi/2$

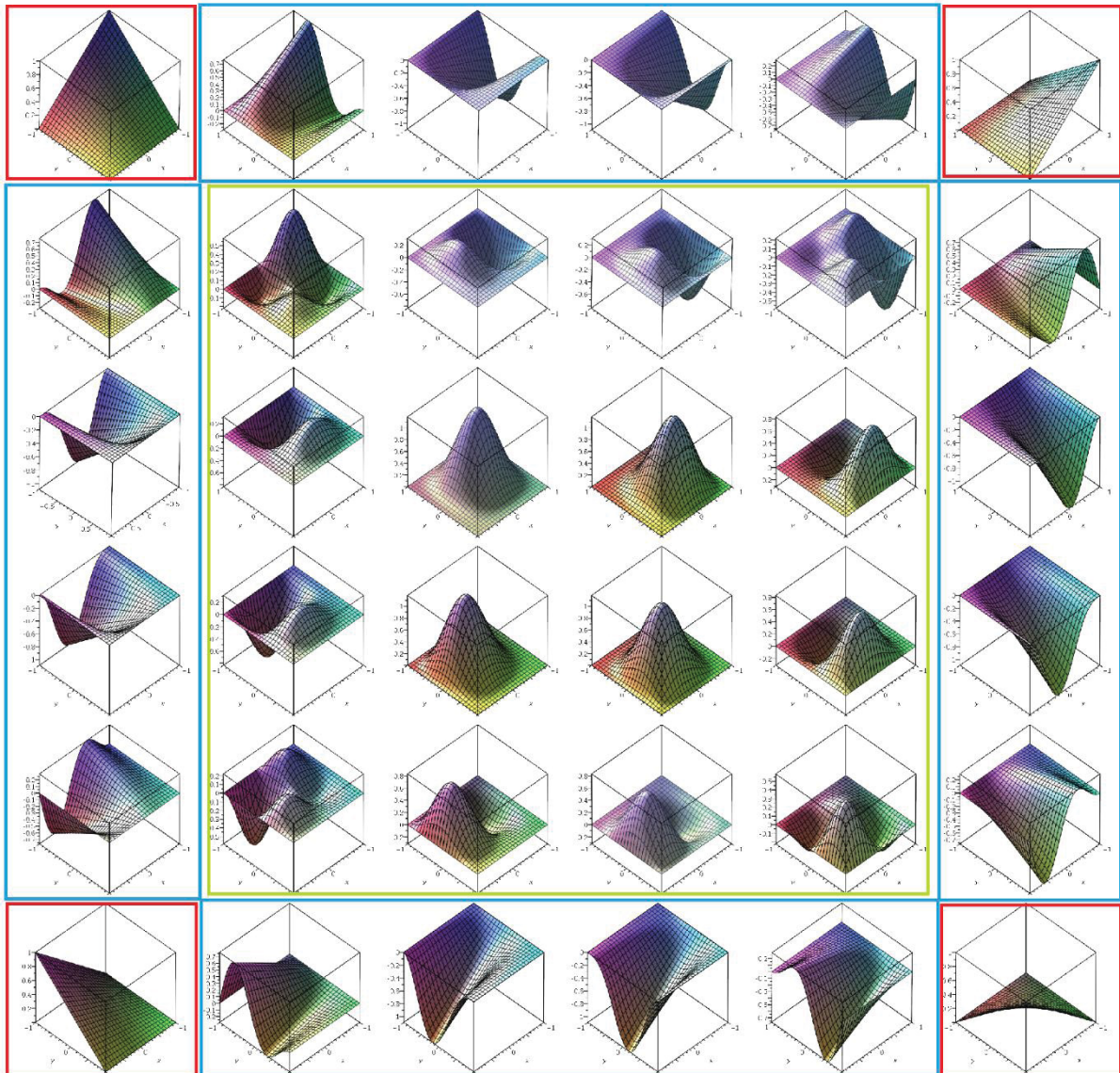


A implementação do MEFG com o uso de funções enriquecidas em elementos bidimensionais segue o mesmo procedimento descrito pela Equação (69) do item 4.3.

Ou seja, para geração de funções de enriquecimento em duas dimensões, basta multiplicar as funções unidimensionais.

Funções de enriquecimento do tipo bolha são geradas pela multiplicação das funções presentes nas Equações (102) a (105) entre si. Já funções de enriquecimento do tipo borda serão geradas pela multiplicação das funções das Equações (102) a (105) pelas funções partição da unidade dadas nas Equações (89) e (90). Na Figura 25 são indicadas as 4 funções nodais (vermelho), as 16 funções de enriquecimento do tipo borda (azul) e as 16 funções de enriquecimento do tipo bolha (verde) utilizadas para aplicação do MEFG em elementos 2D.

Figura 25 - Funções de enriquecimento bidimensionais do MEFG com  $\beta = \pi$



Fonte: Adaptado de WEINHARDT (2016)

## 6 INDICADOR DE ERRO DE FRIBERG

O aprimoramento de refinamentos é uma das principais maneiras de otimizar programas computacionais utilizados na solução de problemas dinâmicos. Além da modificação de funções de forma, como apresentado no tópico 4.3, outro grande foco de pesquisa na área é relativo ao uso de estimadores de erro.

Em sua pesquisa, Mackerle (2001) indicou 2177 referências focadas no estudo de diferentes estimadores de erro dentre os anos de 1990 e 2000. Dentre todos os trabalhos analisados o autor classificou as pesquisas de acordo com o tipo de problema analisado e o tipo de processo adaptativo utilizado. Item, esse último, no qual se destacam procedimentos de refino  $h$ ,  $p$  e  $hp$ .

Estimadores de erro são ferramentas importantes para definição de critérios de parada em processos iterativos, que é o caso dos problemas dinâmicos analisados através de métodos aproximados. Em uma situação ideal, projetistas precisariam somente modelar a geometria, o contorno e as cargas atuantes em um sistema, e o computador, com base em um estimador de erro, definiria o momento em que um resultado é aceitável (FRIBERG et al., 1987).

Erros gerados pelo uso de métodos aproximados baseados na discretização de um domínio estão relacionados ao tamanho e forma dos elementos, e à distribuição de pontos nodais. Desse modo, o erro final obtido em uma análise do Método dos Elementos Finitos é, na verdade, um somatório de erros elementares. Com base nisso, processos de refinamento podem ser aplicados localmente aos elementos nos quais os maiores erros são identificados (SONG et al., 2018).

Caso se busque analisar o erro local puramente para definir onde aplicar refinamentos, não é necessário se estabelecer um valor de erro exato. É nesse contexto que surgem, então, indicadores de erro, que focam principalmente em localizar a fonte de maior erro e não no valor do erro em si.

Friberg (1986) propôs um indicador de erro que fornece resultados adimensionais capazes de indicar a magnitude da variação de um autovalor pré-determinado ao se aplicar um processo de refino hierárquico. Para cálculo do indicador é necessário ter resultados de uma primeira aproximação da solução, que pode ser obtida pelo MEF convencional, e as matrizes que regem o problema refinado.

A vantagem desse processo se encontra na não necessidade de solucionar o problema de autovalores generalizados do sistema de grau superior para se definir quais elementos possuem maior contribuição na convergência da resposta final.

O desenvolvimento detalhado do indicador é apresentado por Friberg (1986), Duarte (2003) e Malacarne (2018). Com base nesses autores, o indicador de Friberg é desenvolvido partindo-se do quociente de Rayleigh, dado por:

$$\lambda_i^{(n)} = \frac{k_i}{m_i} = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^{(n)T} \mathbf{K}_{(n)} \boldsymbol{\phi}_i^{(n)}}{\boldsymbol{\phi}_i^{(n)T} \mathbf{M}_{(n)} \boldsymbol{\phi}_i^{(n)}} \quad (106)$$

onde  $\lambda_i^{(n)}$  e  $\boldsymbol{\phi}_i^{(n)}$  são, respectivamente, o  $i$ -ésimo autovalor e autovetor de um problema dinâmico regido por um sistema de equações de ordem  $n$  composto pelas matrizes de rigidez e massa  $k_i$  e  $m_i$ .

Considerando que no problema analisado seja aplicado um refinamento hierárquico que eleve para  $(n+m)$  o número de graus de liberdade, pode-se considerar, com base no mesmo princípio que:

$$\lambda_i^{(n+m)} = \frac{\boldsymbol{\theta}_i^{(n+m)T} \mathbf{K}_{(n+m)} \boldsymbol{\theta}_i^{(n+m)}}{\boldsymbol{\theta}_i^{(n+m)T} \mathbf{M}_{(n+m)} \boldsymbol{\theta}_i^{(n+m)}} \quad (107)$$

onde o  $i$ -ésimo autovalor passa a ser representados por  $\lambda_i^{(n+m)}$  e o autovetor, ainda desconhecido, passa a ser  $\boldsymbol{\theta}_i^{(n+m)}$ .

Com base nas equações (106) e (107) é possível estimar o quanto o processo de refinamento interferiu na mudança ( $e_i$ ) do autovalor de modo que:

$$e_i = \frac{\lambda_i^{(n)} - \lambda_i^{(n+m)}}{\lambda_i^{(n)}} \quad (108)$$

Em sequência, considera-se que o autovalor  $\lambda_i$  é função de duas variáveis independentes  $k_i$  e  $m_i$ . Desse modo, é possível representar a expressão (106) como uma expansão de Taylor truncada após os três primeiros termos:

$$\lambda_i(k_i + \Delta k_i, m_i + \Delta m_i) = \lambda_i(k_i, m_i) + \Delta k_i \frac{\partial}{\partial k_i} \lambda_i(k_i, m_i) + \Delta m_i \frac{\partial}{\partial m_i} \lambda_i(k_i, m_i) \quad (109)$$

Considerando a relação apresentada pela primeira parcela da equação (106) e suas derivadas e a expressão (109), obtém-se:

$$e_i = \frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} = \frac{\Delta k_i - \lambda_i \Delta m_i}{k_i} \quad (110)$$

É possível, então, avaliar a variação dos termos  $k_i$  e  $m_i$  após o processo de refinamento. Essas variações podem ser escritas como:

$$\Delta k_i = (\boldsymbol{\phi}_i^{(n)T} \mathbf{K}_{(n)} \boldsymbol{\phi}_i^{(n)}) - (\boldsymbol{\theta}_i^{(n+m)T} \mathbf{K}_{(n+m)} \boldsymbol{\theta}_i^{(n+m)}) \quad (111)$$

$$\Delta m_i = (\boldsymbol{\phi}_i^{(n)T} \mathbf{M}_{(n)} \boldsymbol{\phi}_i^{(n)}) - (\boldsymbol{\theta}_i^{(n+m)T} \mathbf{M}_{(n+m)} \boldsymbol{\theta}_i^{(n+m)}) \quad (112)$$

Para continuar o desenvolvimento do indicador, adota-se que as matrizes de rigidez e massa do problema refinado podem ser escritas em blocos de modo a serem representadas por:

$$\mathbf{K}_{(n+m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(n)} & \mathbf{K}_{(n,m)} \\ \mathbf{K}_{(m,n)} & \mathbf{K}_{(m)} \end{bmatrix} \quad (113)$$

$$\mathbf{M}_{(n+m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{(n)} & \mathbf{M}_{(n,m)} \\ \mathbf{M}_{(m,n)} & \mathbf{M}_{(m)} \end{bmatrix} \quad (114)$$

O mesmo procedimento pode ser adotado para a representação do autovetor do problema refinado:

$$\boldsymbol{\theta}_i^{(n+m)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_i^{(n)} \\ \boldsymbol{\theta}_i^{(m)} \end{bmatrix} \quad (115)$$

Implementando a separação em blocos distintos das matrizes de massa e rigidez e adotando que próximo da convergência:

$$\boldsymbol{\phi}_i^{(n)} \approx \boldsymbol{\theta}_i^{(n)} \quad (116)$$

as equações (111) e (112) podem ser reescritas como:

$$\Delta k_i \approx -2\boldsymbol{\theta}_i^{(m)T} \mathbf{K}_{(m,n)} \boldsymbol{\phi}_i^{(n)} - \boldsymbol{\theta}_i^{(m)T} \mathbf{K}_{(m)} \boldsymbol{\theta}_i^{(m)} \quad (117)$$

$$\Delta m_i \approx -2\boldsymbol{\theta}_i^{(m)T} \mathbf{M}_{(m,n)} \boldsymbol{\phi}_i^{(n)} - \boldsymbol{\theta}_i^{(m)T} \mathbf{M}_{(m)} \boldsymbol{\theta}_i^{(m)} \quad (118)$$

Se as expressões (117) e (118) fossem substituídas na estimativa da equação (110), a única incógnita restante no problema seria o autovetor  $\boldsymbol{\theta}_i^{(m)}$ , portanto, é necessário obter uma estimativa do mesmo para prosseguir com os cálculos. Para um procedimento de refinamento hierárquico, o problema de autovalores e autovetores generalizado pode ser escrito como:

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(n)} & \mathbf{K}_{(n,m)} \\ \mathbf{K}_{(m,n)} & \mathbf{K}_{(m)} \end{bmatrix} - \lambda_i^{(n+m)} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{(n)} & \mathbf{M}_{(n,m)} \\ \mathbf{M}_{(m,n)} & \mathbf{M}_{(m)} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_i^{(n)} \\ \boldsymbol{\theta}_i^{(m)} \end{bmatrix} = 0 \quad (119)$$

Ao adotar que próximo da convergência:

$$\lambda_i^{(n+m)} \approx \lambda_i^{(n)} \quad (120)$$

a segunda linha do sistema de equações (119) passa a ser:

$$\theta_i^{(m)} \approx \left[ \mathbf{K}_{(m)} - \lambda_i^{(n)} \mathbf{M}_{(m)} \right]^{-1} \left[ - \left[ \mathbf{K}_{(m,n)} - \lambda_i^{(n)} \mathbf{M}_{(m,n)} \right] \phi_i^{(n)} \right] \quad (121)$$

Desse modo, substituindo as equações (117) , (118) e (121) em (110), obtém-se a expressão final do indicador de Friberg ( $n_i$ ):

$$n_i \approx \frac{\phi_i^{(n)T} \left[ \mathbf{K}_{(m,n)} - \lambda_i^{(n)} \mathbf{M}_{(m,n)} \right]^T \left[ \left[ \mathbf{K}_{(m)} - \lambda_i^{(n)} \mathbf{M}_{(m)} \right]^{-1} \right]^T \left[ \mathbf{K}_{(m,n)} - \lambda_i^{(n)} \mathbf{M}_{(m,n)} \right] \phi_i^{(n)}}{\phi_i^{(n)T} \mathbf{K}_{(n)} \phi_i^{(n)}} \quad (122)$$

Quando o estimador é aplicado a um problema no qual um único nível de refinamento é imposto em um elemento, a inversão da matriz  $\left[ \mathbf{K}_{(m)} - \lambda_i^{(n)} \mathbf{M}_{(m)} \right]$ , que inicialmente seria um procedimento custoso, é simplificada (DUARTE, 2003). Isso porque para casos unidimensionais, o aumento de um único grau de liberdade faz com que essa matriz se reduza a um único valor. Já para o caso bidimensional, a matriz será quadrada de ordem dois, não exigindo, assim, grandes esforços computacionais para sua inversão (MALACARNE, 2018).

Por fim, de acordo com Friberg et al. (1987), o indicador resultante do refinamento de  $k$  elementos ( $n_{total}$ ) é igual a soma do indicador de cada elemento, de modo que:

$$n_{total} = \sum_{i=1}^k n_i \quad (123)$$

Quanto maior o valor do indicador mais o refinamento melhora a solução. Vale destacar que o indicador resulta em um número adimensional que pode, inclusive, assumir valores negativos. Para análises unidimensionais Malacarne (2018) verificou que os melhores indicadores negativos são aqueles que tendem ao maior valor absoluto. A validade dessa afirmação em exemplos bidimensionais será avaliada nos exemplos numéricos.

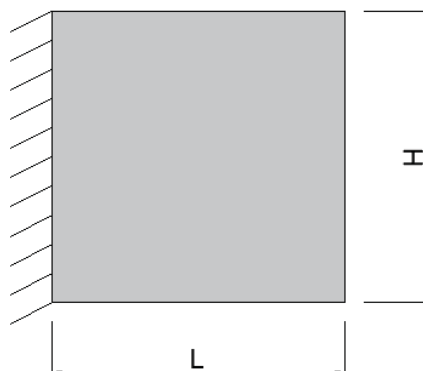
## 7 CARACTERÍSTICAS DO INDICADOR DE FRIBERG

Os primeiros testes realizados analisaram a aplicabilidade e as características do indicador de Friberg em exemplos 2D. Para tanto, foram analisadas as frequências naturais e indicadores obtidos para o exemplo de uma chapa quadrada engastada em uma extremidade (Figura 26) sujeita a um estado plano de tensões. A chapa estudada possui módulo de elasticidade  $E = 210 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , massa específica  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ , espessura  $t = 0,05 \text{ m}$  e dimensões  $L = H = 1 \text{ m}$ .

Essa mesma estrutura havia sido estudada por Torii (2012) e os resultados apresentados pelo autor obtidos através do MEFH polinomial com quatro elementos e ordem nove foram utilizados como referência. Para mapeamento da geometria dos elementos foram utilizados polinômios de Lobatto de primeira ordem. Sendo assim, os elementos não refinados são isoparamétricos e os refinados são subparamétricos.

Todos os exemplos do presente trabalho foram resolvidos em rotinas de cálculo desenvolvidas e implementadas em PYTHON®.

Figura 26 - Exemplo chapa quadrada



### 7.1 PROPRIEDADES DO CÁLCULO DO INDICADOR

Como indicado pela equação (123) apresentada no capítulo 6, a soma dos indicadores de Friberg obtidos ao se refinar cada elemento de uma malha individualmente equivale ao valor obtido ao se calcular o indicador considerando o



refino simultâneo de todos os elementos. Para confirmar tal propriedade a função bolha hierárquica de segunda ordem  $N_5$  dada por:

$$N_5 = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (x^2 - 1) \right) \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (y^2 - 1) \right) \quad (124)$$

foi acrescentada a cada um dos elementos de uma malha 2x2, numerada de acordo com a Figura 27. Os resultados de indicadores obtidos para as frequências da análise são indicados na Tabela 2. Nessa,  $R_n$  indica que o elemento  $n$  foi o elemento refinado no teste. Os resultados apresentados na Tabela 2 verificam a acurácia da propriedade da soma de elementos.

Figura 27 - Chapa quadrada: malha 2x2

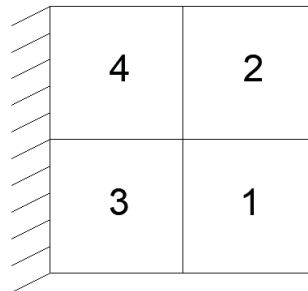


Tabela 2 - Malha 2x2: Cálculo do indicador de Friberg por elemento refinado x refino total

Frequências	Todos Refinados	R1	R2	R3	R4	R1 + R2 + R3 + R4
1	0,0259665	0,0009469	0,0009469	0,0120364	0,0120364	0,0259665
2	0,0335773	0,0164658	0,0164658	0,0003229	0,0003229	0,0335773
3	0,0998930	0,0227648	0,0227648	0,0271817	0,0271817	0,0998930
4	0,1016362	0,0421205	0,0421205	0,0086976	0,0086976	0,1016362
5	0,0837323	0,0293051	0,0293051	0,0125611	0,0125611	0,0837323
6	0,2761580	0,0673703	0,0673703	0,0707087	0,0707087	0,2761580
7	0,0384843	0,0107745	0,0107745	0,0084677	0,0084677	0,0384843
8	0,3854626	0,0582836	0,0582836	0,1344477	0,1344477	0,3854626
9	0,4473619	0,0782381	0,0782381	0,1454429	0,1454429	0,4473619
10	2,4194708	0,8885048	0,8885048	0,3212306	0,3212306	2,4194708
11	0,2233309	0,0931761	0,0931761	0,0184893	0,0184893	0,2233309
12	-1,6060391	-0,5941499	-0,5941499	-0,2088697	-0,2088697	-1,6060391

Baseado em uma ideia similar à possibilidade de se calcular o indicador por elemento em uma malha, o presente trabalho propõe a subdivisão do cálculo do indicador nas duas direções do problema de estado plano. Ou seja, para cada elemento analisado, refinado pela função  $N_5$ , o indicador pode ser calculado somando-se sua parcela na direção horizontal de  $u$  obtida pela matriz de funções de forma:

$$N = \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 & 0 & N5 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 & 0 \end{bmatrix} \quad (125)$$

com a parcela na direção vertical de  $v$  dada pela matriz:

$$N = \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 & 0 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 & N5 \end{bmatrix} \quad (126)$$

A Tabela 3 demonstra tal propriedade para os elementos do exemplo de malha 2x2 para a primeira frequência natural. Os resultados da soma do indicador em cada direção correspondem com o valor do indicador ao se aplicar o refino em ambas as direções simultaneamente.

Tabela 3 - Malha 2x2: Cálculo do indicador de Friberg por direção

Elemento Refinado	$u$	$v$	$u + v$	Refino simultâneo de ambas as direções
1	0,0007930	0,0001539	0,0009469	0,0009469
2	0,0007930	0,0001539	0,0009469	0,0009469
3	0,0001189	0,0119175	0,0120364	0,0120364
4	0,0001189	0,0119175	0,0120364	0,0120364

Por fim, considerando que em problemas de estado plano raramente uma única função de refino é utilizada, avaliou-se o impacto de calcular o indicador por função de enriquecimento. Para isso foram utilizadas quatro funções bolha hierárquicas de Lobatto, dadas por:

$$N_5 = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (x^2 - 1) \right) \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (y^2 - 1) \right) \quad (127)$$

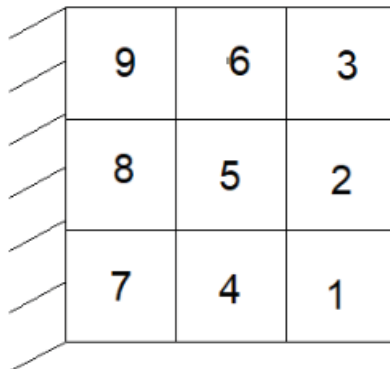
$$N_6 = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (x^2 - 1) \right) \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (y^2 - 1) y \right) \quad (128)$$

$$N_7 = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (x^2 - 1) x \right) \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (y^2 - 1) \right) \quad (129)$$

$$N_8 = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (x^2 - 1) x \right) \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (y^2 - 1) y \right) \quad (130)$$

Foram obtidos resultados tanto para a aplicação simultânea quanto para a aplicação sucessiva das funções a cada um dos elementos da malha 3x3 indicada na Figura 28.

Figura 28 - Chapa quadrada: malha 3x3



9	6	3
8	5	2
7	4	1

Os resultados obtidos em ambos os procedimentos para a primeira frequência natural da estrutura são apresentados na Tabela 4. Nessa, os indicadores foram ordenados do maior para o menor. Os valores obtidos por ambos os procedimentos

apresentam diferenças somente a partir da quarta ou quinta casa decimal. Tais discrepâncias são, provavelmente, decorrentes de erros numéricos. Além disso, não afetam a sequência de ordenação dos estimadores. Ou seja, não afetam a sequência de refino indicada.

Tabela 4 - Malha 3x3: Cálculo por função

Aplicação Simultânea		Aplicação Sucessiva	
Indicador	Elemento indicado	Indicador	Elemento indicado
0,006481530	7 ou 9	0,006493820	7 ou 9
0,001672178	8	0,001673824	8
0,000794406	5	0,000796035	5
0,000452694	4 ou 6	0,000454154	4 ou 6
0,000427656	1 ou 3	0,000430506	1 ou 3
0,000108785	2	0,000108956	2

A possibilidade de se calcular o indicador por elemento, direção e função permite que a matriz  $[K_{(m)} - \lambda_i^{(n)} M_{(m)}]$  da equação (122) seja reduzida a um único valor. Desse modo, evita-se a necessidade de se inverter uma matriz, processo esse que pode ser computacionalmente custoso. No presente trabalho os exemplos foram desenvolvidos considerando a divisão do cálculo somente por elemento. Com tal consideração a inversão de matrizes não representou um problema nas análises e os tempos computacionais atingidos foram vantajosos. Desse modo, a divisão por direção e função não foi considerada. Análises de tempo computacional serão apresentadas em mais detalhes nos principais exemplos.

## 7.2 ACURÁCIA DO INDICADOR EM ANÁLISES DE MEFH

Com objetivo de analisar a acurácia do indicador em determinar a melhor sequência de aplicação de refinamentos hierárquicos, foram calculados os valores dos indicadores e das frequências naturais ao serem refinados individualmente os elementos da chapa quadrada (Figura 26). Para tal análise foi utilizada a função bolha de segunda ordem  $N_5$  indicada na equação (124).

Sabe-se que o melhor elemento a ser refinado é aquele que leva ao menor erro. Além disso, tal elemento deve possuir o mais alto indicador de Friberg. Sendo assim, para facilitar a visualização dos resultados, os valores de erro foram ordenados de maneira crescente e os valores dos indicadores de maneira decrescente.

Os resultados obtidos para a primeira, sexta e décima-segunda frequências das malhas 2x2 (Figura 27) e 3x3 (Figura 28) são apresentados da Tabela 5 a Tabela 10. Nessas, os erros e os indicadores são indicados, respectivamente, na primeira e terceira colunas. A segunda e quarta colunas indicam o elemento que foi refinado para obter o resultado da coluna anterior. Sendo assim, se o indicador corretamente identificar a melhor sequência de refinamento, a segunda e quarta colunas das tabelas devem ser iguais. Para facilitar a visualização, quaisquer discrepâncias foram destacadas na cor amarelo.

Tabela 5 - Malha 2x2: Acurácia do indicador para a 1ª frequência

Erro após refino (crescente)	Elemento refinado	Indicador (decrescente)	Elemento indicado
8,49%	3 ou 4	0,012036416	3 ou 4
9,12%	1 ou 2	0,000946855	1 ou 2

Tabela 6 - Malha 2x2: Acurácia do indicador para a 6ª frequência

Erro após refino (crescente)	Elemento refinado	Indicador (decrescente)	Elemento indicado
19,73%	1 ou 2	0,070708691	3 ou 4
20,56%	3 ou 4	0,067370328	1 ou 2

Tabela 7 - Malha 2x2: Acurácia do indicador para a 12ª frequência

Erro após refino (crescente)	Elemento refinado	Indicador (decrescente)	Elemento indicado
47,44%	1 ou 2	-0,208869668	3 ou 4
51,50%	3 ou 4	-0,594149902	1 ou 2

Tabela 8 - Malha 3x3: Acurácia do indicador para a 1ª frequência

Erro após refino (crescente)	Elemento refinado	Indicador (decrecente)	Elemento indicado
4,69%	7 ou 9	0,006296074	7 ou 9
4,95%	8	0,001622766	8
4,99%	5	0,000765749	5
5,01109%	1 ou 3	0,000432685	4 ou 6
5,01110%	4 ou 6	0,000408973	3 ou 1
5,03%	2	0,000099790	2

Tabela 9 - Malha 3x3: Acurácia do indicador para a 6ª frequência

Erro após refino (crescente)	Elemento refinado	Indicador (decrecente)	Elemento indicado
9,86%	4 ou 6	0,043245798	4 ou 6
10,53%	2	0,028239451	2
11,35%	1 ou 3	0,011312249	1 ou 3
11,45%	8	0,009357922	8
11,69%	7 ou 9	0,005080827	7 ou 9
11,98%	5	0,000098591	5

Tabela 10 - Malha 3x3: Acurácia do indicador para a 12ª frequência

Erro após refino (crescente)	Elemento refinado	Indicador (decrecente)	Elemento indicado
22,61%	2	0,031331997	2
23,88%	5	0,011536437	7 ou 9
23,99%	7 ou 9	0,009966959	5
24,34%	8	0,002720215	8
24,43%	4 ou 6	0,001901176	4 ou 6
24,47%	1 ou 3	0,000986353	1 ou 3

Com base nos resultados da Tabela 5 a Tabela 10 pode-se concluir que o indicador de Friberg é capaz de identificar a melhor sequência de refinamento em um processo hierárquico. A única exceção ocorre quando o refino de dois elementos distintos leva a erros próximos. Nesses casos, o indicador pode inverter a ordem correta.

Em malhas pouco discretizadas o impacto da inversão é maior, uma vez que pode automaticamente levar à pior sequência de refinamento, como no exemplo da malha 2x2. Além disso, em malhas com poucos elementos a aplicação de enriquecimentos em toda a malha não gera grandes custos computacionais. Sendo

assim, não se recomenda o uso de malhas pouco discretizadas para refino sequencial guiado pelo indicador de Friberg.

Deve-se levar em consideração que podem haver erros numéricos embutidos nos cálculos que comprometam uma avaliação precisa de valores muito próximos. No entanto, como em problemas bidimensionais costuma-se trabalhar com regiões de elementos enriquecidos, tais diferenças pouco afetarão os resultados finais.

Com base em tais resultados, com o intuito de avaliar o comportamento do indicador em frequências mais elevadas foi analisada a malha 3x3. Os resultados obtidos para a 20ª frequência são indicados na Tabela 11. Percebe-se que o indicador continua mantendo sua acurácia mesmo em frequências mais elevadas.

Tabela 11 - Malha 3x3: Acurácia do indicador para a 20ª frequência

Erro após refino (crescente)	Elemento Refinado	Indicador (decrecente)	Elemento indicado
35,18%	1 ou 3	0,175827870	1 ou 3
36,22%	7 ou 9	0,119589850	4 ou 6
36,30%	4 ou 6	0,111329655	7 ou 9
37,34%	8	0,010342804	2
37,35%	2	0,010021967	8
37,55%	5	0,000421487	5

Por fim, como demonstrado pelos resultados da Tabela 7, o indicador de Friberg pode assumir valores negativos. Para avaliar a possibilidade de uso de tais valores, foi analisada a 23ª frequência da malha 3x3. Para essa, como não se tinha uma solução referência, os resultados de frequências naturais foram ordenados de modo crescente. Isso porque sabe-se que os resultados convergem por valores superiores.

Os resultados de indicadores foram ordenados de modo crescente, para indicar o máximo módulo, e decrescente, para indicar o máximo positivo. Isso foi realizado pois não há conhecimento prévio sobre a relação dos indicadores negativos com o erro.

Os resultados são apresentados na Tabela 12 e evidenciam que não há uma relação clara do indicador com a precisão. Desse modo, indicadores negativos não devem ser considerados. Tal característica não possui grandes impactos pois

resultados negativos tendem a aparecer somente nas últimas frequências e essas raramente são o foco de análises dinâmicas convencionais.

Tabela 12 - Malha 3x3: acurácia de valores negativos

Resultado (crescente)	Elemento Refinado	Indicador (decrecente)	Elemento indicado	Indicador (crescente)	Elemento indicado
60005,72205	2	-0,113538647	8	-0,691384929	1 ou 3
60128,09292	5	-0,117485905	7 ou 9	-0,682064403	2
60298,08876	4 ou 6	-0,369223106	5	-0,373628341	4 ou 6
60319,43695	8	-0,373628341	4 ou 6	-0,369223106	5
60354,98693	1 ou 3	-0,682064403	2	-0,117485905	7 ou 9
60436,19543	7 ou 9	-0,691384929	1 ou 3	-0,113538647	8

### 7.3 INDICADOR DE FRIBERG EM ANÁLISES DE MEFG

Para verificar a acurácia do indicador de Friberg em problemas analisados através do MEFG foram acrescentadas as 16 funções bolha do método a cada um dos elementos da malha 3x3. As funções foram obtidas considerando  $\beta = \pi$ . A adoção exclusiva das funções bolha teve o propósito de permitir análises iniciais com maior facilidade de implementação computacional.

Os resultados obtidos para a 1ª e 12ª frequência são apresentados na Tabela 13 e na Tabela 14. Tais tabelas são organizadas da mesma forma que as apresentadas no item 7.2. Novamente, quaisquer discrepâncias observadas foram destacadas na cor amarelo para facilitar a visualização dos resultados. Os resultados apresentados reiteram as conclusões apresentadas no item 7.2.



Tabela 13 - Malha 3x3: Acurácia em MEFG do indicador para a 1ª frequência

Erro após refino (crescente)	Elemento refinado	Indicador (decrecente)	Elemento indicado
4,67%	7 ou 9	0,006594	7 ou 9
4,94%	8	0,001701	8
4,99%	5	0,000808	5
5,0094%	1 ou 3	0,000461	4 ou 6
5,0095%	4 ou 6	0,000435	1 ou 3
5,03%	2	0,000111	2

Tabela 14 - Malha 3x3: Acurácia em MEFG do indicador para a 12ª frequência

Erro após refino (crescente)	Elemento refinado	Indicador (decrecente)	Elemento indicado
20,90%	2	0,062702	2
23,24%	5	0,021136	5
23,35%	1 ou 3	0,020002	1 ou 3
23,61%	4 ou 6	0,016229	4 ou 6
23,87%	7 ou 9	0,014458	7 ou 9
24,18%	8	0,005159	8

### 7.3.1 PREDOMINÂNCIA DO PRIMEIRO NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO

A definição da sequência ideal de enriquecimento tem como objetivo possibilitar um enriquecimento seletivo da malha. No entanto, caso o refinamento de uma determinada região seja feito e não resulte em um erro global que respeite dada tolerância, deve-se definir como proceder para obter resultados mais precisos. Nesse processo, dada uma determinada região já enriquecida, pode-se:

- Proposta 1: continuar aplicando o primeiro nível de enriquecimento nos elementos ainda não enriquecidos;
- Proposta 2: aplicar o segundo nível de enriquecimento nos elementos ainda não enriquecidos;
- Proposta 3: aplicar o segundo nível de enriquecimento nos elementos previamente enriquecidos pelo primeiro.

As três propostas foram testadas para a primeira frequência da malha 3x3. Para isso foram calculados os indicadores para cada proposta. Foi considerada a aplicação inicial do primeiro nível de refinamento nos elementos 7 e 9 da malha, uma vez que esses foram identificados como sendo os mais impactantes na solução do problema no item 7.3 (ver Tabela 13). Sendo assim, esses dois elementos com um nível de enriquecimento são a condição inicial dos cálculos. Um esquema de enriquecimento para cada proposta é apresentado na Figura 29. Os resultados obtidos podem ser observados na Tabela 15. Nessa, um traço foi utilizado para indicar os elementos aos quais a proposta não se aplica.

Figura 29 - Propostas de enriquecimento

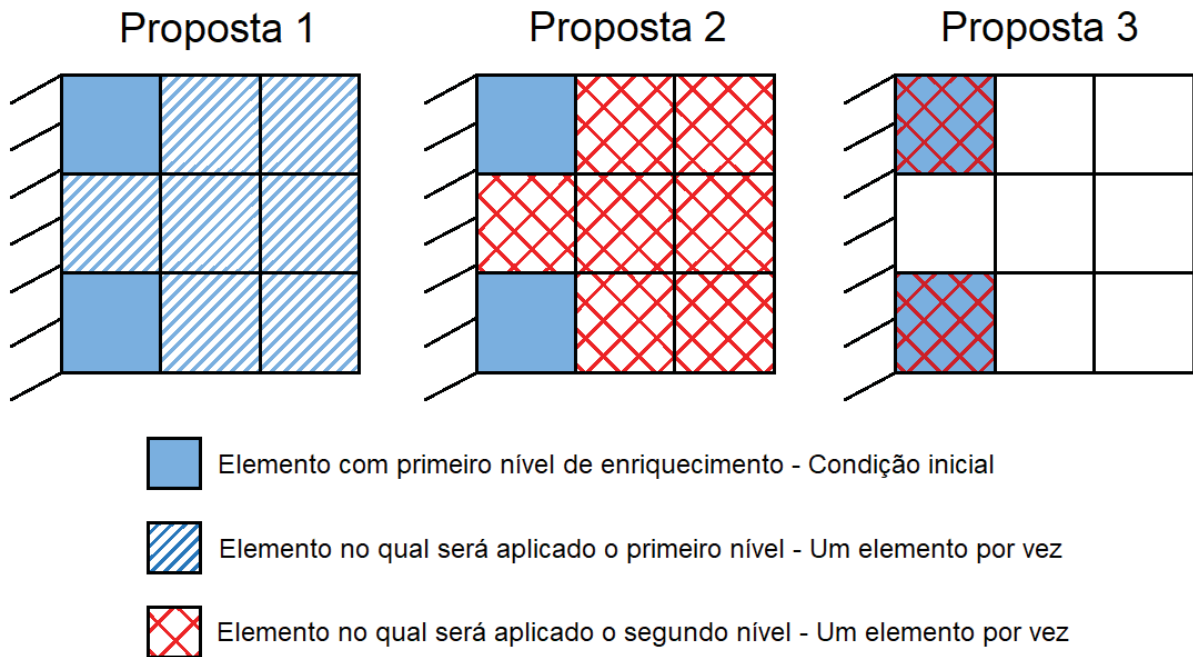


Tabela 15 - Resultados propostas de enriquecimento para primeira frequência

Elemento Enriquecido	Proposta 1		Proposta 2		Proposta 3	
	Frequência (rad/s)	Indicador	Frequência (rad/s)	Indicador	Frequência (rad/s)	Indicador
1	3516,513391	0,000440514	3516,523185	0,000436288	-	-
2	3517,205493	0,000104046	3517,207455	0,000103082	-	-
3	3516,513391	0,000440514	3516,523185	0,000436288	-	-
4	3516,615761	0,00041369	3516,623887	0,000409737	-	-
5	3515,54037	0,001000975	3515,559358	0,000991319	-	-
6	3516,615761	0,00041369	3516,623887	0,000409737	-	-
7	-	-	-	-	3517.393851	1.75E-07
8	-	-	-	-	3517.393851	1.75E-07
9	3514,59064	0,001545991	3514,6188	0,001531008	-	-

Os valores de indicadores obtidos para a Proposta 1 são superiores àqueles obtidos para a Proposta 2. Esses últimos, por sua vez, são superiores aos obtidos pela Proposta 3. Sendo assim, os resultados dos indicadores evidenciam que o primeiro nível de enriquecimento é o que mais impacta a resposta final. Desse modo, o segundo nível deve ser aplicado somente após a aplicação do primeiro em todos os elementos da malha.

Além disso, é possível perceber que refinar igualmente os elementos é mais vantajoso do que refinar com múltiplos níveis um conjunto de elementos. Por fim, destaca-se que, novamente, os resultados do indicador condizem com os resultados de frequências. Ou seja, a proposta com maior indicador é a que levou ao menor valor de frequência natural.

Esse comportamento também é refletido ao se analisarem os resultados de indicadores quando diferentes níveis são aplicados individualmente aos elementos. A Tabela 16 apresenta os indicadores obtidos para o enriquecimento do elemento 1 da malha quando são aplicados o primeiro, segundo e terceiro níveis individualmente. Os demais elementos da malha não são apresentados, mas apresentaram o mesmo comportamento.

Tabela 16 - Indicadores de diferentes níveis

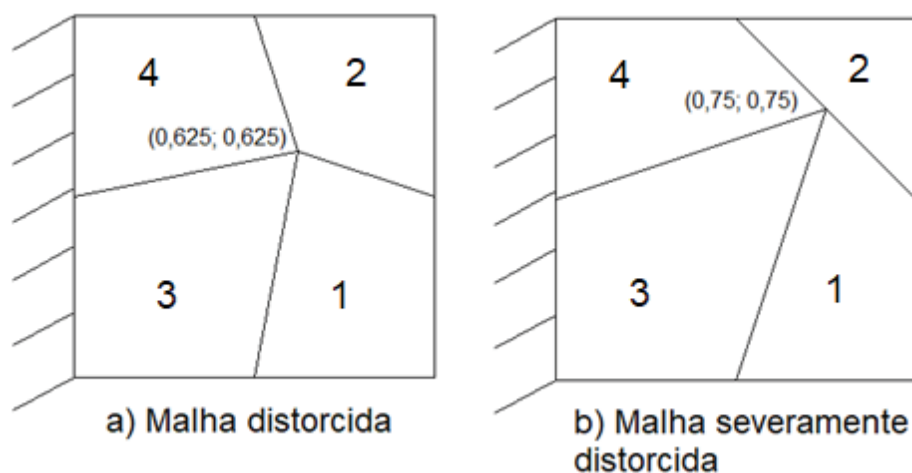
Frequência	Nível 1 $\beta = \pi$	Nível 2 $\beta = 2\pi$	Nível 3 $\beta = 3\pi$
1	0,000435127	0,000434168	0,000341671
2	0,003714859	0,003701523	0,002816848
3	0,005575354	0,005546101	0,004196592
4	0,014373867	0,014304384	0,011174288
5	0,015308123	0,015267643	0,011561494
6	0,014975347	0,014860279	0,011088833
7	0,013498326	0,013314223	0,010626154
8	0,018332442	0,018230617	0,013633151
9	0,046258127	0,046290593	0,034848201
10	0,059924344	0,059741207	0,044816635
11	0,018384568	0,018182026	0,013884735
12	0,020031333	0,019766858	0,016036963

Os resultados da Tabela 16 demonstram que para as doze frequências apresentadas o primeiro nível apresenta indicadores, que apesar de próximos, são sempre superiores aos obtidos pelo segundo nível. Já o terceiro nível de enriquecimento apresenta indicadores menores do que os dois iniciais. Essa análise é útil pois comprova as conclusões obtidas na Tabela 15 através de uma implementação computacional mais simples. Isso porque para obter os resultados da Tabela 15 é preciso trabalhar com elementos com vários e diferentes níveis de refino entre si. Ou seja, é necessário analisar um modelo no qual existem elementos não enriquecidos, enriquecidos por um nível, que pode não ser o mesmo de outros elementos, e/ou elementos enriquecidos por mais de um nível. Já os resultados da Tabela 16 são obtidos a partir de um problema onde um único elemento possui um nível de enriquecimento.

### 7.3.2 A INFLUÊNCIA DE ELEMENTOS DISTORCIDOS

Até o presente item todas as malhas apresentadas eram compostas por elementos regulares. Entretanto, em muitos exemplos reais é necessário empregar elementos distorcidos. Para analisar o efeito da distorção de elementos no indicador de Friberg foram analisadas duas malhas de quatro elementos indicadas pela Figura 30.

Figura 30 - (a) Malha distorcida (b) Malha severamente distorcida



Os resultados dos indicadores obtidos para as frequências de ambas as malhas são indicados na Tabela 17. Os  $n$  elementos enriquecidos são referenciados por  $Rn$ . Ressalta-se, a critério de comparação, que para a malha regular utilizada até o momento, para as mesmas frequências, indicadores negativos só eram obtidos nas últimas duas frequências. Para auxiliar na visualização valores negativos foram destacados pela cor amarelo.

Tabela 17 - Indicadores para malhas distorcidas

Freq.	R1		R2		R3		R4	
	Malha (a)	Malha (b)	Malha (a)	Malha (b)	Malha (a)	Malha (b)	Malha (a)	Malha (b)
1	0,000671	0,001723	0,001636	0,000900	0,016108	0,025360	0,011799	0,007456
2	0,016509	0,013024	0,009708	0,004801	0,001765	0,004529	0,000734	0,001513
3	0,031372	0,029755	0,046426	0,066584	0,050234	0,080602	0,025947	0,037129
4	0,063706	0,075468	0,064192	0,046370	0,008163	0,076327	0,011076	0,020519
5	0,088736	0,112742	0,023578	0,015371	0,089175	0,207174	0,093477	0,019514
6	0,068088	0,084157	0,021933	0,041061	0,094409	0,033721	0,023652	0,123125
7	0,063208	0,160489	0,044600	0,068295	0,054277	0,058244	0,048670	0,181765
8	0,188229	0,547756	0,049497	0,028253	0,475359	-4,309612	0,218334	0,295382
9	0,247332	0,191371	0,113596	0,065605	-0,173183	-0,238592	0,487019	-1,502051
10	0,025355	0,169036	0,096818	0,255525	0,166195	-0,204006	0,251127	-0,039783
11	-0,822044	-0,277956	0,446042	0,138824	0,926002	0,534553	-3,922986	-0,242155
12	-0,277259	5,049638	1,796393	1,985150	0,030403	-0,626394	-0,108765	7,891565

Os resultados obtidos indicam que quanto maior é a distorção do elemento utilizado mais indicadores negativos são obtidos na análise. Esses, como previamente indicado neste trabalho e por Friberg et al. (1987), não devem ser utilizados nas análises. Sendo assim, é preferível, quando possível, trabalhar com malhas que não possuam elementos distorcidos.

Dito isso, para as frequências nas quais não são obtidos indicadores negativos, esses continuam apontando adequadamente a melhor sequência de refinamento. Esse comportamento pode ser visualizado na Tabela 18 e na Tabela 19.

Tabela 18 - Malha distorcida (a): acurácia do indicador para a 1ª frequência

Erro após refino (crescente)	Elemento refinado	Indicador (decrecente)	Elemento indicado
7,82%	3	0,016108382	3
8,09%	4	0,011799306	4
8,68%	2	0,001636007	2
8,73%	1	0,000670627	1

Tabela 19 - Malha severamente distorcida (b): acurácia do indicador para a 6ª frequência

Erro após refino (crescente)	Elemento refinado	Indicador (decrecente)	Elemento indicado
38,08%	4	0,123125107	4
38,91%	1	0,084156546	1
41,17%	2	0,041061241	2
41,65%	3	0,033721374	3

### 7.3.3 A INFLUÊNCIA DE FUNÇÕES DO TIPO BORDA

Até o presente item todas as análises consideraram o uso exclusivo de funções do tipo bolha. Isso foi realizado devido à facilidade de implementação desse tipo de função, uma vez que essas não exigem compatibilização entre elementos. No entanto, o uso de enriquecimentos tem como principal objetivo obter respostas mais

precisas. Sendo assim, é necessário avaliar o quanto o uso exclusivo de funções bolha influencia a precisão dos resultados.

Com esse objetivo, as frequências naturais da chapa quadrada, considerando a malha 2x2 apresentada na Figura 27, foram obtidas com o uso exclusivo de funções bolha e também considerando o enriquecimento total contendo todas as funções bolha e borda geradas pela multiplicação das funções de enriquecimento unidimensionais. Os resultados de erros relativos em porcentagem das primeiras 20 frequências, com diferentes valores de  $\beta$ , para ambos os procedimentos de enriquecimento são apresentados na Tabela 20.

Tabela 20 - Comparativo de erro (%) com e sem o uso de funções do tipo borda

Frequência	MEF 18 g.l.	MEFG $\beta = \pi$		MEFG $\beta = 3\pi/2$		MEFG $\beta = 2\pi$	
		Bolhas 146 g.l.	Total 242 g.l.	Bolhas 146 g.l.	Total 242 g.l.	Bolhas 146 g.l.	Total 242 g.l.
1	9,839	7,5829	0,0636	7,5851	0,0774	7,5993	0,1410
2	3,6654	1,6712	0,0208	1,6738	0,0248	1,6918	0,0463
3	17,9518	11,5813	0,0132	11,5881	0,0233	11,6345	0,1069
4	19,7518	11,6325	0,0030	11,6393	0,0098	11,6884	0,1042
5	28,5921	13,1595	0,0347	13,1726	0,0472	13,2694	0,1545
6	22,9822	14,2092	0,0006	14,2167	0,0061	14,2626	0,0915
7	36,6104	25,1551	0,0174	25,1713	0,0305	25,2612	0,1549
8	40,0250	19,3106	0,0423	19,3229	0,0624	19,4137	0,2046
9	28,5663	11,3904	0,0130	11,4000	0,0248	11,4566	0,0909
10	55,2201	19,4060	0,0143	19,4246	0,0229	19,5173	0,1481
11	52,5679	26,2061	0,0119	26,2272	0,0157	26,3071	0,0832
12	55,2866	30,8821	0,0348	30,9063	0,0513	30,9701	0,1204
13	-	33,2686	0,0405	33,2741	0,0515	33,3413	0,1423
14	-	37,3014	0,0504	37,3068	0,0721	37,3785	0,2223
15	-	37,7525	0,0362	37,7467	0,0470	37,7763	0,1164
16	-	35,8093	0,0301	35,8062	0,0365	35,8564	0,0978
17	-	37,8949	0,0090	37,8705	0,0072	37,8973	0,0309
18	-	35,4406	0,0083	35,4229	0,0100	35,4628	0,0312
19	-	31,3778	0,1281	31,3469	0,1067	31,3897	0,2419
20	-	30,8544	0,0271	30,7180	0,0257	30,6834	0,0662

Os resultados apresentados na Tabela 20 evidenciam a importância da inclusão de funções do tipo borda no enriquecimento para obtenção de resultados mais precisos. Para os enriquecimentos apresentados, apesar do aumento no número

de graus de liberdade do problema, a incorporação das funções borda reduziram no mínimo em 98% o erro final obtido com o uso somente de funções do tipo bolha.

Além disso é importante ressaltar que o uso exclusivo de funções bolha, para as frequências apresentadas, leva a erros que variam de 1,7% a 37,9%. Já os erros obtidos com o uso conjunto de funções bolha e borda variam de 0,0006% a 0,24%. Ou seja, os erros obtidos com o enriquecimento total (funções bolha e borda) são pequenos o suficiente para serem considerados aceitáveis para diversas aplicações. O mesmo não é válido com o uso somente de funções bolha.

Feita tal análise, o próximo passo foi verificar se o indicador de Friberg mantém sua capacidade de determinação de ordem de enriquecimento quando tais funções são incorporadas. Para isso foram calculados as frequências naturais e os indicadores ao serem refinados individualmente cada elemento da malha, considerando  $\beta = \pi$ .

Foi utilizada a malha 3x3 (Figura 28), visto que o item 7.2 evidenciou desvantagens do uso da malha 2x2 (Figura 27). Os resultados obtidos para a 1ª e 3ª frequências são indicados na Tabela 21 e Tabela 22. Os resultados apresentados reiteram as conclusões obtidas a respeito do indicador em exemplos prévios. Ou seja, o indicador continua evidenciando a melhor sequência de refino com base no cálculo das frequências naturais. Além disso, pequenas discrepâncias ocorrem quando os erros finais das frequências calculadas são muito próximos.

Tabela 21 - Malha 3x3: Acurácia do indicador na 1ª frequência com o uso de funções bolha e borda

Erro após refino (crescente)	Elemento refinado	Indicador (decrecente)	Elemento indicado
3,17%	7 ou 9	0,030625747	7 ou 9
3,89%	4 ou 6	0,018920066	8
3,90%	8	0,018783426	4 ou 6
4,57%	1 ou 3	0,006875356	1 ou 3
4,62%	2	0,006870759	2
4,76%	5	0,004693455	5



Tabela 22 - Malha 3x3: Acurácia do indicador na 3ª frequência com o uso de funções bolha e borda

Erro após refino (crescente)	Elemento refinado	Indicador (decrecente)	Elemento indicado
6,18%	5	0,048599348	5
6,20%	4 ou 6	0,045723951	4 ou 6
6,91%	7 ou 9	0,038598042	7 ou 9
7,69%	8	0,025202665	8
8,34%	1 ou 3	0,014364386	1 ou 3
8,71%	2	0,007450988	2

A importância das funções do tipo borda pode ser visualizada, também, na análise dos indicadores. A sequência de refino apresentada na Tabela 21 e Tabela 22 pode ser comparada com a sequência obtida ao se utilizarem somente funções do tipo bolha ou somente funções do tipo borda. Essa comparação é apresentada nas Tabela 23 e Tabela 24.

Percebe-se que o uso apenas de funções do tipo borda para o cálculo do indicador leva exatamente à mesma sequência que o refino total (funções bolha e borda). Isso permite que o cálculo do indicador seja feito com um número reduzido de variáveis. Isso porque as funções bolhas não são incorporadas nas matrizes utilizadas para o cálculo do indicador e cada função não utilizada representa dois graus de liberdade a menos no elemento.

Tabela 23 - Sequência de enriquecimento 1ª frequência

Bolha	Borda	Bolha + Borda
7 ou 9	7 ou 9	7 ou 9
8	8	8
5	4 ou 6	4 ou 6
4 ou 6	1 ou 3	1 ou 3
1 ou 3	2	2
2	5	5

Tabela 24 - Sequência de enriquecimento 3ª frequência

Bolha	Borda	Bolha + Borda
4 ou 6	5	5
5	4 ou 6	4 ou 6
8	7 ou 9	7 ou 9
1 ou 3	8	8
7 ou 9	1 ou 3	1 ou 3
2	2	2

Outra vantagem obtida ao se utilizarem somente as funções do tipo borda no cálculo do indicador é o aparecimento de indicadores negativos em frequências mais altas. Esse efeito pode ser observado na Tabela 25. Nessa são apresentados os indicadores obtidos quando o elemento 1 da malha é refinado considerando incorporação de diferentes funções.

Tabela 25 - Presença de indicadores negativos

Frequência	Somente Bolha	Somente Borda	Bolha e Borda
1	0,000435	0,006677	0,006875
2	0,003715	0,009271	0,009395
3	0,005575	0,013749	0,014364
4	0,014374	0,051440	0,054681
5	0,015308	0,095042	0,107800
6	0,014975	0,068255	0,073790
7	0,013498	0,077539	-0,200139
8	0,018332	0,185683	0,040261
9	0,046258	0,858269	-0,067458
10	0,059924	-0,053591	0,249695
11	0,018385	-0,034970	0,144349
12	0,020031	0,099830	0,163159

Para o exemplo da Tabela 25, o uso exclusivo de funções bolha não apresentou indicadores negativos. Quando funções borda foram incorporadas em conjunto com as funções bolha, indicadores negativos podem ser observados a partir da 7ª frequência natural. Já quando somente funções do tipo borda são utilizadas esses passam a existir a partir da 10ª frequência.

O uso exclusivo das funções do tipo borda apresentam vantagens para o cálculo do indicador, mas comprometem a acurácia da frequência natural obtida. Como um dos objetivos da presente pesquisa é avaliar a acurácia do indicador, valores de frequência natural foram obtidos juntamente com cada indicador calculado. Sendo assim, nos exemplos desenvolvidos, o enriquecimento aplicado aos elementos foi completo, ou seja, inclui funções do tipo bolha e borda.

Em todas as análises desenvolvidas até este ponto, elementos de transição foram utilizados. Tais elementos garantem a compatibilidade entre elementos, como detalhado no item 4.3. No entanto, dificultam a programação do código. Com base nesse contraponto, verificou-se a possibilidade de se calcularem os indicadores e, conseqüentemente, se obter a sequência de refino, sem o uso de elementos de transição.

Os resultados da sequência de refino obtida ao se refinar cada elemento da malha 3x3, sem o uso de elementos de transição é apresentado para a 1ª e 3ª frequências na Tabela 26 e Tabela 27. Nessas, são indicadas novamente as sequências de refino obtidas com o uso dos elementos de transição para facilitar a comparação. Nesse exemplo tanto funções bolha quanto borda são incorporadas ao elemento enriquecido.

Tabela 26 - Impacto do uso de elementos de transição na 1ª frequência

Com elementos de transição	Sem elementos de transição
7 ou 9	7 ou 9
8	5
4 ou 6	4 ou 6
1 ou 3	8
2	2
5	1 ou 3

Tabela 27 - Impacto do uso de elementos de transição na 3ª frequência

Com elementos de transição	Sem elementos de transição
5	4 ou 6
4 ou 6	1 ou 3
7 ou 9	8
8	5
1 ou 3	7 ou 9
2	2

Os resultados evidenciam que a falta de compatibilização entre elementos compromete a ordem indicada. Sendo assim, esse procedimento não é recomendado. Além disso, outro ponto negativo gerado pela ausência de elementos de transição é a maior presença de indicadores negativos. Para o enriquecimento do primeiro elemento da malha, detalhado na Tabela 25, a não utilização de elementos de transição faz com que indicadores negativos apareçam já na 4ª frequência natural.

## 8 ENRIQUECIMENTO SELETIVO NA ANÁLISE MODAL

Após realizadas as análises de características gerais do indicador de Friberg, esse foi utilizado como base para realização de enriquecimentos seletivos de diferentes exemplos. As frequências naturais e modos de vibração dos exemplos foram obtidos utilizando-se o primeiro nível de enriquecimento do MEFG. O impacto desse foi demonstrado no capítulo 7. Para mapeamento da geometria dos elementos foram utilizados polinômios de Lobatto de primeira ordem. Sendo assim, os elementos enriquecidos são subparamétricos e os demais isoparamétricos.

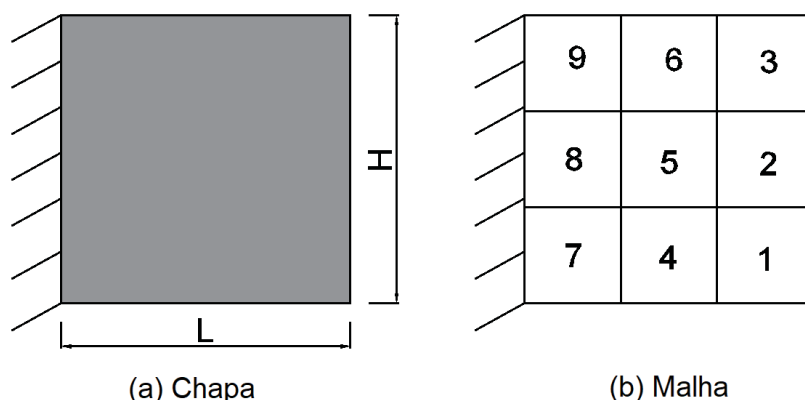
Em todos os exemplos analisados neste capítulo os indicadores foram calculados por elemento. Essa análise permite determinação de uma sequência de enriquecimento. Além disso, todos os exemplos foram analisados considerando o uso de funções de enriquecimento do tipo bolha e borda. Por fim, destaca-se que sempre foram utilizados elementos de transição para garantir compatibilidade entre elementos adjacentes.

Nos exemplos deste capítulo as sequências de refinamento serão tomadas como aquelas indicadas pelos resultados do indicador de Friberg. Não serão apresentadas as sequências de enriquecimento dadas pelo cálculo das frequências naturais. No entanto, essas foram calculadas e verificaram a sequência do indicador em todos os exemplos.

### 8.1 CHAPA QUADRADA ENGASTADA

O primeiro exemplo analisado foi o da chapa quadrada engastada em sua extremidade esquerda, previamente apresentado no capítulo 7. Destaca-se que os graus de liberdade relativos às funções do tipo borda na lateral do engaste foram restritos para garantir essa condição de contorno ao longo de toda a borda. A chapa possui módulo de elasticidade  $E = 210 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , massa específica  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ , espessura  $t = 0,05 \text{ m}$  e dimensões  $L = H = 1 \text{ m}$ . Considerou-se o estado plano de tensões. As análises foram feitas considerando uma malha 3x3. A estrutura e a malha são indicadas na Figura 31.

Figura 31 - (a) Chapa analisada (b) Malha adotada



Os resultados obtidos com a aplicação de um nível de enriquecimento, para diferentes valores de  $\beta$  são indicados na Tabela 28. Esses são apresentados em uma escala de cor onde verde indica o melhor resultado e vermelho o pior. São apresentados também os valores de referência propostos por Torii (2012), obtidos através do MEFH com uso dos polinômios de Lobatto de ordem nove e uso de uma malha 2x2.

Tabela 28 - Frequências naturais (rad/s): chapa quadrada

Referência (1298 g.l.)	MEF (32 g.l.)	$\beta = \pi$ (512 g.l.)	$\beta = 3\pi/2$ (512 g.l.)	$\beta = 2\pi$ (512 g.l.)	$\beta = 5\pi/2$ (512 g.l.)
3372,13	3541,937419	3373,218273	3373,464127	3374,628401	3381,764202
8092,72	8238,911003	8093,583825	8093,763034	8094,678809	8100,751271
9079,09	9910,595719	9079,543188	9080,006336	9084,353671	9117,892880
14427,23	16147,164311	14427,398368	14428,073057	14437,106915	14513,663045
15558,23	17930,380994	15560,784247	15561,931081	15572,553213	15659,388810
16511,96	18491,129391	16512,014357	16512,590451	16520,692139	16590,107884
20812,77	25764,109666	20813,929473	20815,549699	20835,551031	21015,925028
21911,61	27065,741587	21915,688021	21917,973922	21939,428741	22119,076267
24194,74	28667,181915	24195,613069	24197,286165	24220,828435	24449,879044
24349,42	30651,894711	24351,137823	24352,881610	24377,246351	24595,706748
25319,9	30799,411506	25321,447752	25322,362468	25334,534083	25443,690224
26790,31	33359,089306	26793,676891	26795,880501	26819,234716	27046,881828

Percebe-se que os resultados, para as doze primeiras frequências, obtidos com uso de  $\beta = \pi$  foram os que mais se aproximaram da solução de referência. Sendo assim, esse valor de beta foi utilizado para as análises de enriquecimento seletivo. O

enriquecimento seletivo foi realizado tendo como frequências alvo a primeira e a terceira frequências naturais. A acurácia dos indicadores nessa análise já foi detalhada no item 7.3.3 (Tabela 21 e Tabela 22).

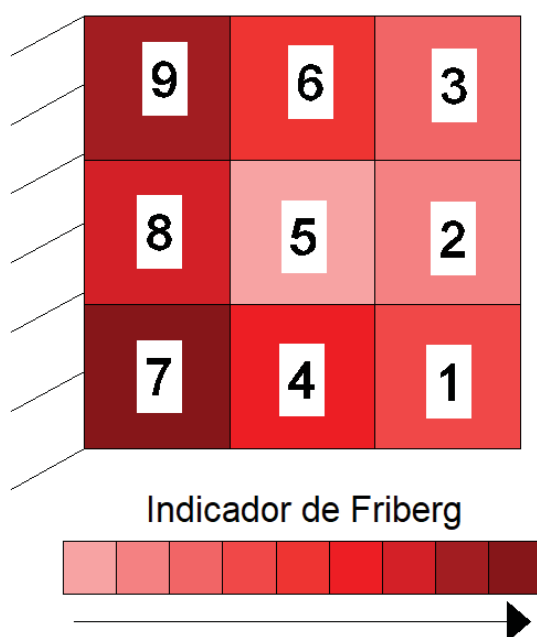
### 8.1.1 PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL COMO ALVO

A primeira frequência analisada para o enriquecimento seletivo foi a primeira frequência natural da estrutura. Os indicadores obtidos para a 1ª frequência são indicados na Tabela 29. A sequência pode ser visualizada na Figura 32.

Tabela 29 - Chapa: Sequência numérica de enriquecimento para a 1ª frequência

Indicador (decrecente)	Elemento indicado
0,030625747	7 ou 9
0,018920066	8
0,018783426	4 ou 6
0,006875356	1 ou 3
0,006870759	2
0,004693455	5

Figura 32 - Chapa: Sequência de enriquecimento 1ª frequência



Com base na sequência indicada, a malha foi refinada progressivamente. A Tabela 30 indica, para cada novo elemento refinado, a soma do indicador de Friberg, o número de graus de liberdade, a frequência natural e o número de condição da matriz de massa. Além disso, é indicada a capacidade de aproximação (CA) ao se enriquecer cada elemento. A CA é um parâmetro proposto pelo presente trabalho com objetivo de medir a porcentagem do efeito do enriquecimento do MEFG que é obtida a cada etapa. Para isso, a CA é calculada tendo como base comparativa a resposta obtida pelo MEF e é dada por:

$$CA = \frac{(Erro_{MEF} - Erro_{SELETIVO})}{(Erro_{MEF} - Erro_{MEFG})} \quad (131)$$

onde  $Erro_{MEF}$  é o erro da frequência natural obtida pelo MEF,  $Erro_{MEFG}$  é o erro da frequência natural obtida pelo MEFG com enriquecimento em todos os elementos e  $Erro_{SELETIVO}$  é o erro da frequência obtida pelo MEFG com enriquecimento seletivo.

Tabela 30 - Chapa: Enriquecimento sequencial 1ª frequência

Elementos Refinados	Soma Friberg	Graus de Liberdade	Frequência (rad/s)	CA	Número de Condição
7	0,030626	96	3479,018997	37,292%	1,925E+11
7,9	0,061251	160	3412,801297	76,539%	2,120E+11
7,9,8	0,080172	208	3411,616848	77,241%	3,311E+11
7,9,8,4	0,098955	264	3400,535569	83,809%	3,832E+11
7,9,8,4,6	0,117738	320	3388,830071	90,747%	4,149E+11
7,9,8,4,6,1	0,124614	376	3380,646814	95,597%	4,247E+11
7,9,8,4,6,1,3	0,131489	432	3374,275967	99,373%	4,347E+11
7,9,8,4,6,1,3,2	0,138360	480	3373,223207	99,997%	4,713E+11
7,9,8,4,6,1,3,2,5	0,143053	512	3373,218273	100,000%	5,713E+11

Para facilitar a visualização e análise dos resultados, os valores indicados na Tabela 30 foram plotados nas Figura 33 a Figura 35. A Figura 33 indica a relação entre a soma dos indicadores e a CA. Nessa, a soma dos indicadores foi normalizada em uma escala de zero a um. A Figura 34 indica a relação da CA com o número de graus de liberdade. Por fim, a Figura 35 indica a relação do número de graus de liberdade com o número de condição da matriz de massa.



Figura 33 - Chapa: Relação soma de Friberg com CA 1ª frequência

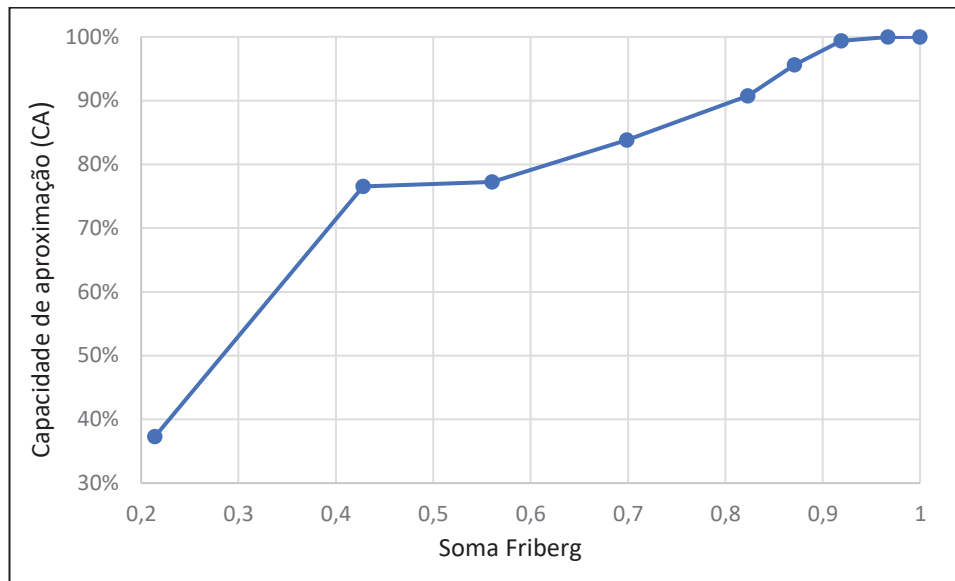


Figura 34 - Chapa: Relação do número de graus de liberdade com a CA 1ª frequência

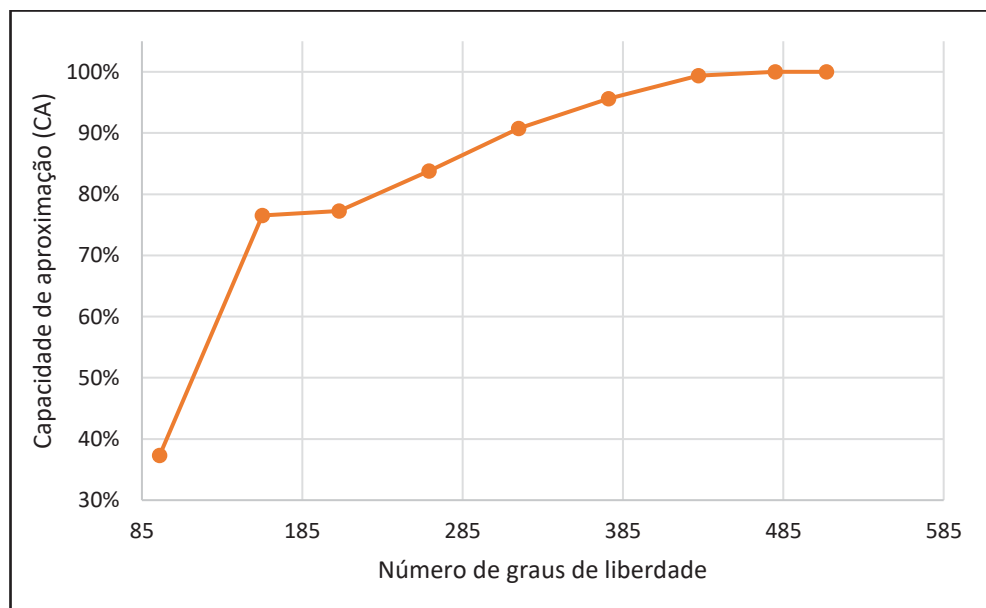
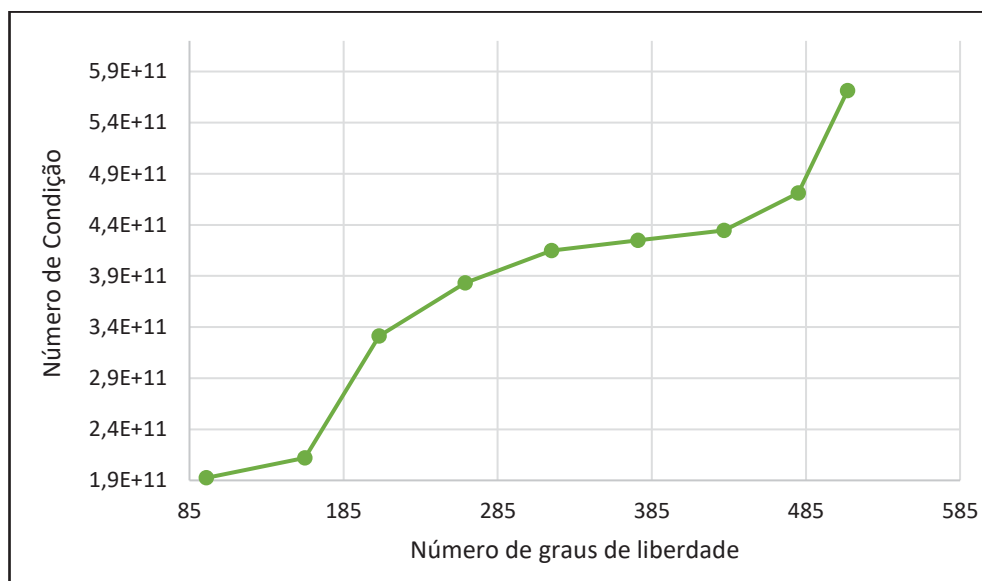


Figura 35 - Chapa: Relação número de graus de liberdade com o número de condição 1ª frequência



Através da Figura 33 evidencia-se que com o enriquecimento de apenas dois elementos da malha, que representam 42,8% da soma de Friberg, quase 80% do efeito do enriquecimento total de um nível já é atingido. Ou seja, a maior parte da CA é atingida com um número reduzido de elementos. Capacidades de aproximação de 80% e 90%, nesse caso, estão associadas, respectivamente, à aproximadamente 65% e 83% da soma do indicador.

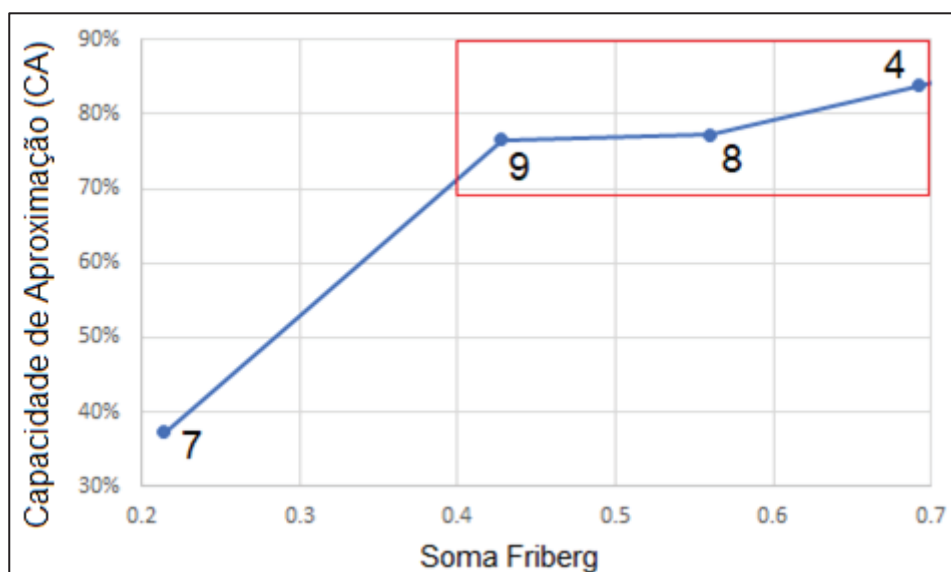
Esse mesmo comportamento se reflete na análise da CA com o aumento de graus de liberdade indicado na Figura 34. Nessa, percebe-se que o enriquecimento de dois elementos leva à quase 80% da CA com apenas 160 graus de liberdade. Para atingir 90% da CA apenas 320 graus de liberdade são necessários.

Desse modo, as Figura 33 e Figura 34 permitem concluir que mais de 80% do efeito da aplicação de um nível de enriquecimento é atingido com menos de 70% da soma de Friberg. Tal efeito é atingido com uso de menos de 50% do número de graus de liberdade do enriquecimento total.

Em relação à variação do número de condição do problema destaca-se que a magnitude do número pouco varia ao longo do processo de enriquecimento. Dentro dessa variação a contribuição dos primeiros e últimos elementos enriquecidos é superior aos intermediários.

Cabe aqui uma ressalva importante sobre a maneira como o problema foi analisado e como isso impacta os resultados. Esperava-se que na Figura 33 e Figura 34 a taxa da CA sempre decaísse com um novo enriquecimento. No entanto, percebe-se que a taxa da CA cresce em determinados pontos. Esse comportamento é exemplificado na Figura 36.

Figura 36 - Detalhamento taxa da CA



Percebe-se que ao se refinar o elemento 4, a taxa de CA aumenta em relação àquela obtida ao se refinar o elemento 8. Isso ocorre devido ao uso de elementos de transição. O impacto do elemento 8 é maior que o do elemento 4 quando se considera o refino individual dos elementos. No entanto, o enriquecimento dos elementos 7 e 9 com uso de elementos de transição incorporam um enriquecimento ao elemento 8. Sendo assim, seu impacto diminui. Já o elemento 4, que possuía, até o momento, menos interferência de elementos de transição, passa a contribuir mais para a CA ao ser refinado.

Desse modo, para se obterem as melhores taxas de CA possíveis seria necessário que, a cada novo elemento refinado, o indicador de todos os outros fossem recalculados considerando o elemento já enriquecido como condição inicial. No entanto, esse procedimento aumentaria muito o esforço computacional necessário.

Além disso, como a aplicação do enriquecimento sequencial partindo dos indicadores iniciais levou a bons resultados, esse procedimento não foi adotado nessa pesquisa.

Com base no que foi apresentado, a Tabela 31 indica os valores dos erros na 1ª frequência natural caso essa seja obtida por MEF, MEFG e MEFG seletivo. O resultado de MEFG seletivo considerou enriquecimento dos elementos de modo que a soma dos indicadores seja no mínimo 70% da soma total. Nesse caso, 83,8% da CA é obtida com o refino de 4 elementos, resultando, assim, em um problema com 264 graus de liberdade.

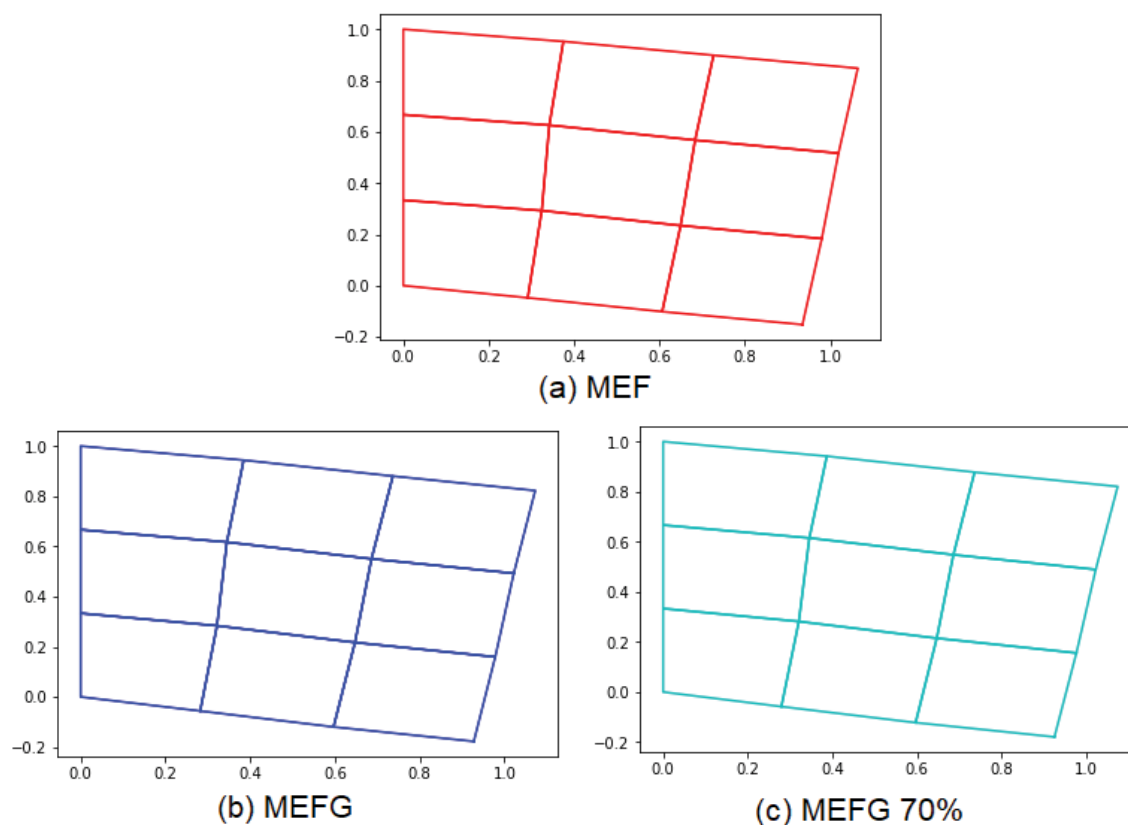
Uma situação ideal é aquela na qual, a partir do cálculo dos indicadores, pode-se definir quais e quantos elementos serão refinados. Sendo assim, o parâmetro de 70% da soma total de Friberg será utilizado em todos os exemplos apresentados desse ponto em diante. Isso permitirá uma análise comparativa da eficiência desse critério de enriquecimento. Tal análise será denominada MEFG 70%. Destaca-se que o MEFG 70% representa um possível aprimoramento do próprio MEFG e não um método a parte.

Tabela 31 - Chapa: Resultado comparativo da 1ª frequência

	Frequência (rad/s)	Erro
MEF (32 g.l.)	3541,937419	5,04%
MEFG (512 g.l.)	3373,218273	0,03%
MEFG 70% (264 g.l.)	3400,535569	0,84%

Os modos de vibração obtidos para as três considerações indicadas na Tabela 31 são apresentados na Figura 37. Observa-se que os três procedimentos indicaram o mesmo modo de vibração. Fatores de escala foram utilizados na geração das imagens.

Figura 37 - Chapa: 1° modo de vibração natural



Por fim, foram analisados os tempos computacionais necessários para a análise completa de MEFG, na qual o enriquecimento é aplicado a todos os elementos, e do MEFG 70%. Esses resultados são indicados na Tabela 32. Nessa, evidencia-se que o MEFG 70% demanda menos computacionalmente em relação ao MEFG total. Isso ocorre pois o tempo para obtenção dos autovalores e autovetores decresce o suficiente para compensar o acréscimo de tempo gerado pelo cálculo dos indicadores.

Tabela 32 - Chapa: Tempo computacional

	Montar Matrizes (s)	Cálculo indicadores (s)	Solução (s)	Total (s)
MEFG	7,378	-	0,734	8,112
MEFG 70%	7,378	0,144	0,047	7,569

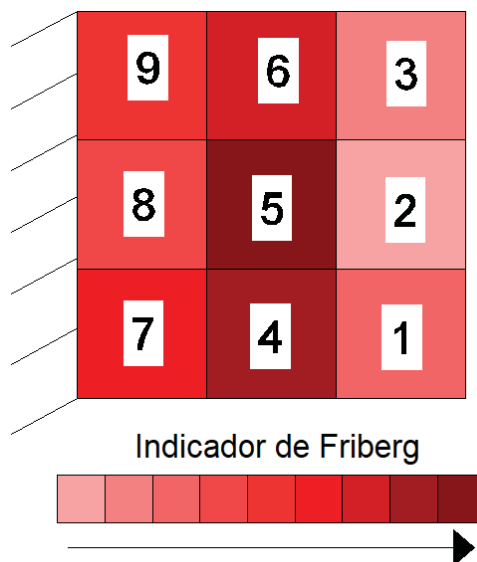
### 8.1.2 TERCEIRA FREQUÊNCIA NATURAL COMO ALVO

Em sequência as mesmas análises realizadas no item 8.1.1 foram feitas com a 3ª frequência como alvo. A sequência de enriquecimento obtida através dos indicadores de Friberg é apresentada na Tabela 33 e na Figura 38.

Tabela 33 - Chapa: Sequência numérica de enriquecimento 3ª frequência

Indicador (decrecente)	Elemento indicado
0,048599348	5
0,045723951	4 ou 6
0,038598042	7 ou 9
0,025202665	8
0,014364386	1 ou 3
0,007450988	2

Figura 38 - Chapa: Sequência de enriquecimento 3ª frequência



Seguindo a sequência indicada foram obtidos os valores da soma do indicador de Friberg, o número de graus de liberdade, a frequência natural, a CA e o número de condição da matriz de massa a medida em que cada elemento era refinado. Os resultados são indicados na Tabela 34. Tais resultados são apresentados graficamente na Figura 39 a Figura 41. Novamente os valores da soma de Friberg foram normalizados em uma escala de zero a um.

Tabela 34 - Chapa: Enriquecimento sequencial 3ª frequência

Elementos Refinados	Soma Friberg	Graus de Liberdade	Frequência (rad/s)	CA	Número de Condição
5	0,048599	96	9640,612726	32,49%	1,080E+11
5,4	0,094323	152	9511,058108	48,08%	2,138E+11
5,4,6	0,140047	208	9388,334796	62,84%	2,481E+11
5,4,6,7	0,178645	264	9275,337272	76,44%	3,391E+11
5,4,6,7,9	0,217243	320	9160,004869	90,32%	3,598E+11
5,4,6,7,9,8	0,242446	360	9159,204899	90,41%	4,921E+11
5,4,6,7,9,8,1	0,256810	416	9121,178457	94,99%	5,056E+11
5,4,6,7,9,8,1,3	0,271175	472	9079,81841	99,97%	5,197E+11
5,4,6,7,9,8,1,3,2	0,278626	512	9079,43188	100,00%	5,713E+11

Figura 39 - Chapa: Relação soma de Friberg com CA 3ª frequência

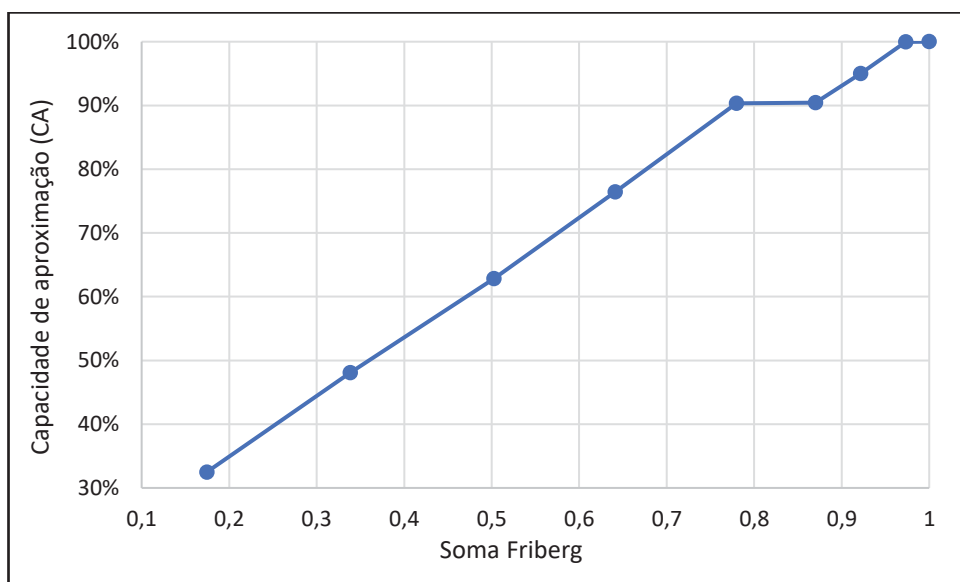


Figura 40 - Chapa: Relação do número de graus de liberdade com a CA 3ª frequência

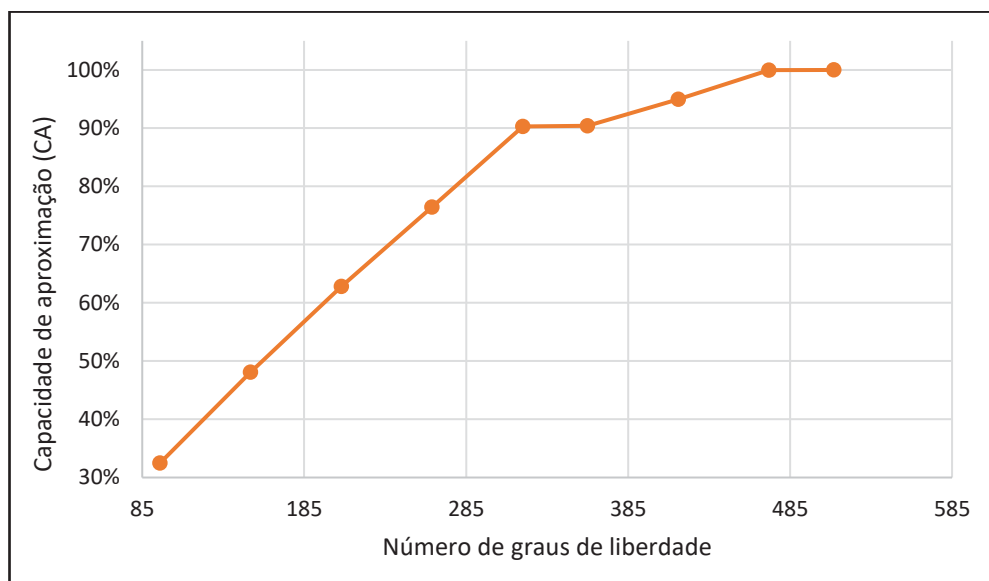
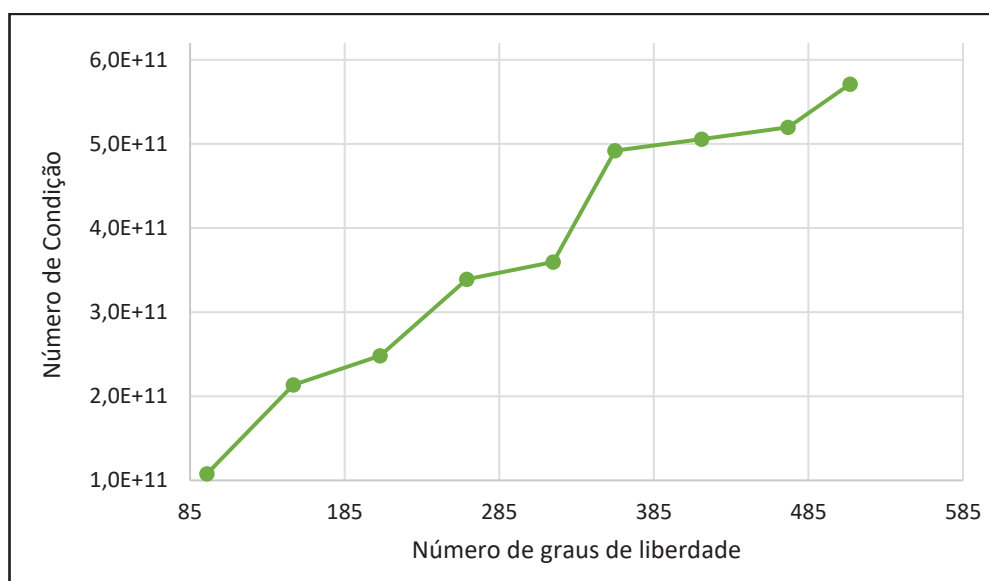


Figura 41 - Chapa: Relação número de graus de liberdade com o número de condição 3ª frequência



A Figura 39 e Figura 40 indicam que o comportamento da CA em relação ao valor da soma de Friberg e ao número de graus de liberdade é diferente daquele apresentado pela 1ª frequência. Não existe, nesse caso, um salto muito grande logo nos primeiros elementos. No entanto, percebe-se que a maior contribuição vem do enriquecimento dos 5 primeiros elementos. Durante o refino desses, a taxa da CA se mantém praticamente constante.



Para a 3ª frequência, capacidades de aproximação de 80% e 90% são atingidas com aproximadamente 67% e 77% da soma do indicador de Friberg. A obtenção de tais capacidades de aproximação é obtida com 320 graus de liberdade. Na análise da 1ª frequência observou-se que a CA de 80% necessitava somente de 160 graus de liberdade para ser atingida, evidenciando-se assim, a diferença de comportamento entre as duas frequências.

Em relação ao número de condição da matriz de massa, novamente percebe-se que esse não possui grande variação de magnitude ao longo do processo de enriquecimento. Para a variação existente, o comportamento não aparenta possuir relação com o apresentado na análise da 1ª frequência natural.

Os resultados do MEFG 70% (320 graus de liberdade), aquele cujos elementos enriquecidos são os necessários para a soma de Friberg ser igual ou superior a 70%, são indicados na Tabela 34. Nessa, também são indicados os resultados da 3ª frequência natural resultantes das análises de MEF e MEFG tradicional com enriquecimento de todos os elementos da malha.

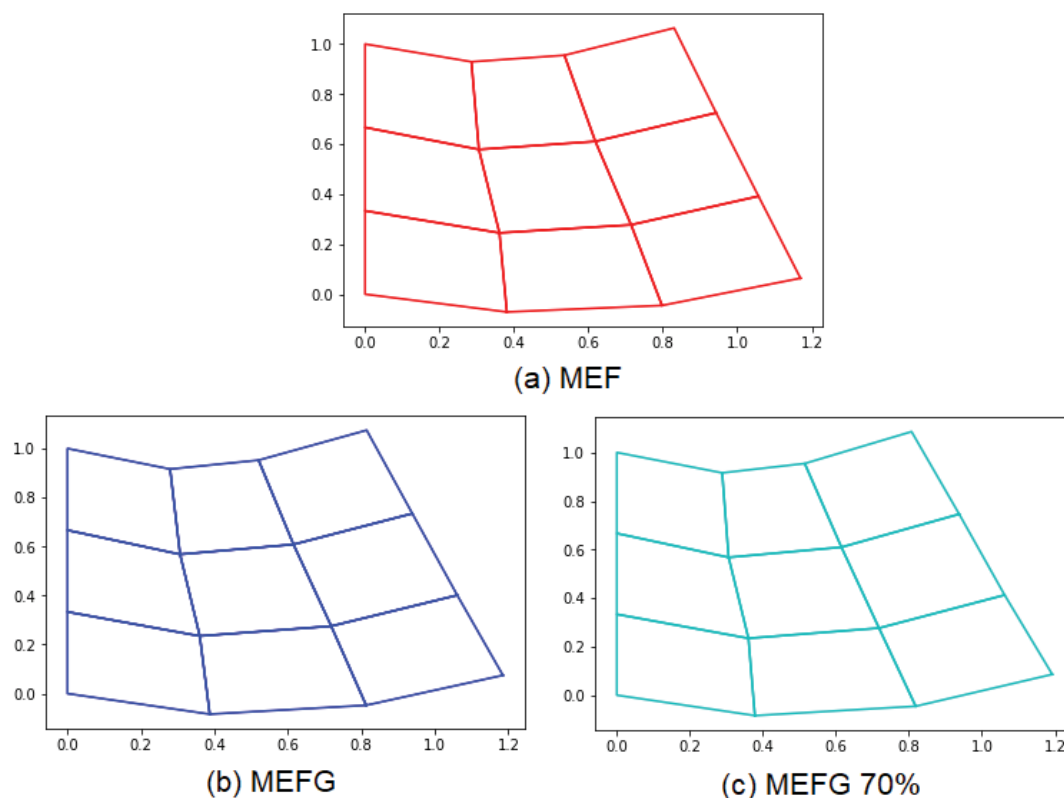
Destaca-se que o MEFG 70% para a 1ª frequência exigia um número menor de graus de liberdade, 264 com uma CA de aproximadamente 83,8%. Já na análise atual, o MEFG 70% leva a uma CA de aproximadamente 90%.

Tabela 35 - Resultado comparativo da 3ª frequência

	Frequência (rad/s)	Erro
MEF (32 g.l.)	9910,595719	9,158%
MEFG (512 g.l.)	9079,543188	0,005%
MEFG 70% (320 g.l.)	9160,004869	0,891%

Os modos de vibração obtidos pelas três análises apresentadas são indicados na Figura 42. Observa-se que todas as análises resultaram em modos com os mesmos comportamentos. Fatores de escala foram utilizados na plotagem das figuras.

Figura 42 - Chapa: 3° modo de vibração natural



Por fim, foi analisado o tempo computacional necessário para obtenção dos autovalores e autovetores do MEFG e MEFG 70%. Os resultados obtidos são indicados na Tabela 36. Nessa, evidencia-se que, como foram refinados um maior número de elementos, o tempo computacional do MEFG 70% aumentou em relação a análise da 1ª frequência natural. No entanto, esse ainda permaneceu abaixo do tempo necessário para se enriquecerem todos os elementos da malha.

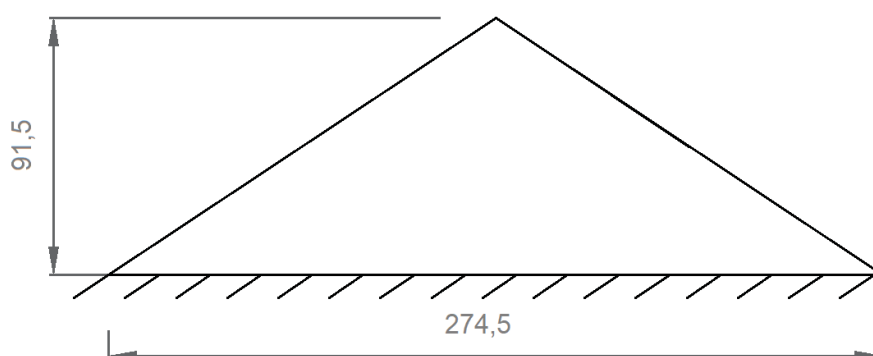
Tabela 36 - Chapa: Tempo computacional

	Montar Matrizes (s)	Cálculo indicadores (s)	Solução (s)	Total (s)
MEFG	7,378	-	0,734	8,112
MEFG 70%	7,378	0,144	0,188	7,710

## 8.2 BARRAGEM DE TERRA

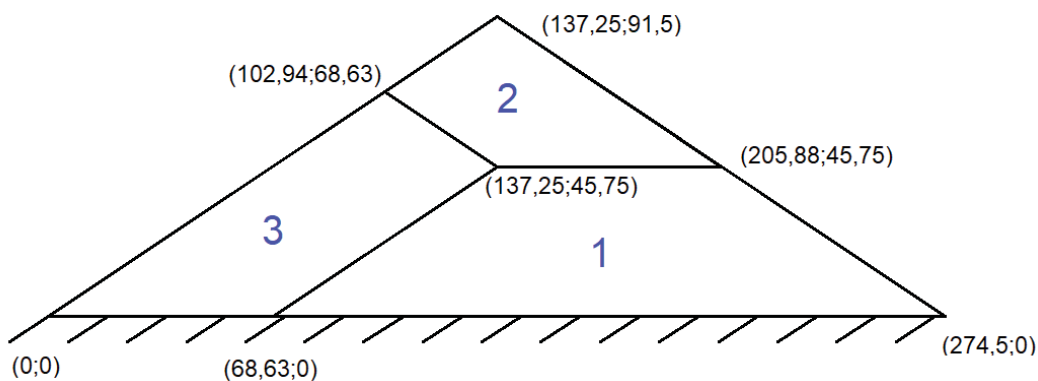
O segundo exemplo analisado é o de uma barragem de terra com seção transversal triangular sujeita ao estado plano de deformações. A estrutura possui módulo de elasticidade  $E = 5,602 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ , massa específica  $\rho = 2080 \text{ kg/m}^3$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,45$ . A estrutura e suas dimensões em metros são indicadas na Figura 43.

Figura 43 - Barragem de terra



Este problema foi estudado por Clough e Chopra (1966) utilizando o MEF com o uso de elementos CST, por Cheung, Zhang e Chen (2000) utilizando o MEF com uso de elementos quadriláteros não conformes e por Leung et al. (2004) através do método  $p$ -Fourier. Essas pesquisas calcularam as quatro primeiras frequências naturais da barragem de terra. A primeira malha analisada foi a proposta por Leung et al. (2004), indicada na Figura 44. As coordenadas dos nós são indicadas em metros.

Figura 44 - Barragem: malha 3 elementos



Os resultados obtidos para as primeiras quatro frequências através do MEF e MEFG para a malha proposta são indicados na Tabela 37. Em todos os exemplos do capítulo, o MEFG será aplicado com  $\beta = \pi$ . Por simplificação, os resultados de Clough e Chopra (1966), Cheung, Zhang e Chen (2000) e Leung et al. (2004) serão referenciados no texto como, respectivamente, Referência 1, 2 e 3. São indicados, para cada método, o número de graus de liberdade utilizados (g.l.).

Tabela 37 - Frequências naturais da barragem de terra (rad/s)

Referência 1 (110 g.l.)	Referência 2 (72 g.l.)	Referência 3 (25 g.l.)	MEF (14 g.l.)	MEFG (182 g.l.)
7,71	7,79	7,76	7,951185	7,762405
12,52	12,52	12,51	17,713607	12,469602
14,60	14,49	14,51	23,442433	14,346639
19,31	18,36	18,42	30,696909	18,367676

Os resultados apresentados indicam que, para a primeira frequência o resultado obtido pelo MEFG é menor do que o apresentado pela Referência 2, muito próximo ao obtido na Referência 3 e um pouco maior que o obtido pela Referência 1. No entanto, para as demais frequências os resultados obtidos pelo MEFG são menores do que os apresentados nas demais referências. Partindo do pressuposto que a convergência ocorre por valores superiores, pode-se afirmar que valores menores correspondem a valores mais precisos. Destaca-se que o modelo de MEFG exigiu um número maior de graus de liberdade do que os demais métodos.

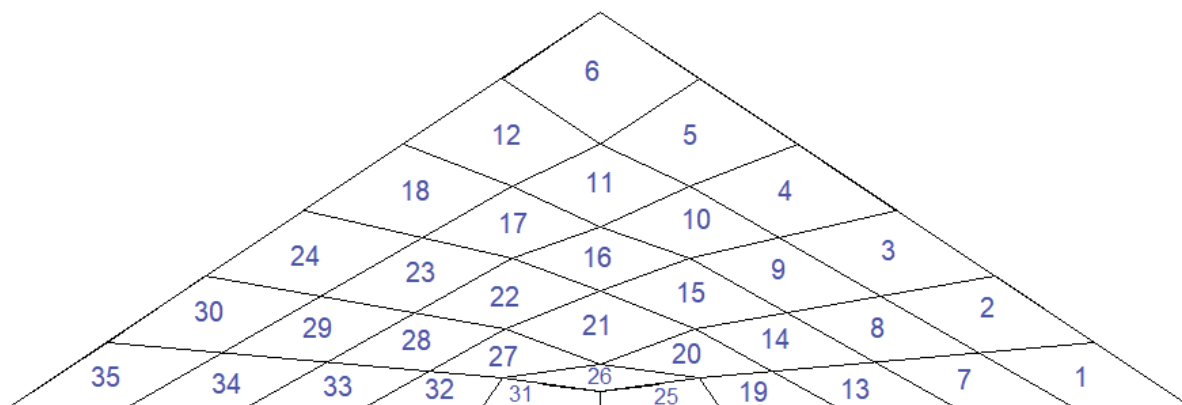
Para as quatro frequências estudadas foram calculados os indicadores de Friberg ao serem enriquecidos individualmente pelo MEFG cada elemento da malha. Os valores obtidos são indicados na Tabela 38.

Tabela 38 - Barragem: Indicadores para malha 3 elementos

Frequência	Elemento 1	Elemento 2	Elemento 3
1	0,022139	0,021587	0,02449971
2	0,470108	0,548556	0,27179907
3	0,560209	-1,78552	0,73105833
4	0,230222	-0,08528	0,41945768

Valores negativos de indicadores foram obtidos já na 3ª frequência natural. Isso ocorre pelo uso de elementos distorcidos e é agravado pelo uso de poucos elementos. Esse comportamento condiz com as características apresentadas no capítulo 7. Sendo assim, como o foco deste trabalho é analisar detalhadamente o enriquecimento seletivo guiado pelo indicador, uma malha com 35 elementos foi proposta. Essa foi baseada na malha apresentada por Cheung, Zhang e Chen (2000). A malha proposta e a numeração dos elementos são apresentadas na Figura 45.

Figura 45 - Barragem: malha 35 elementos



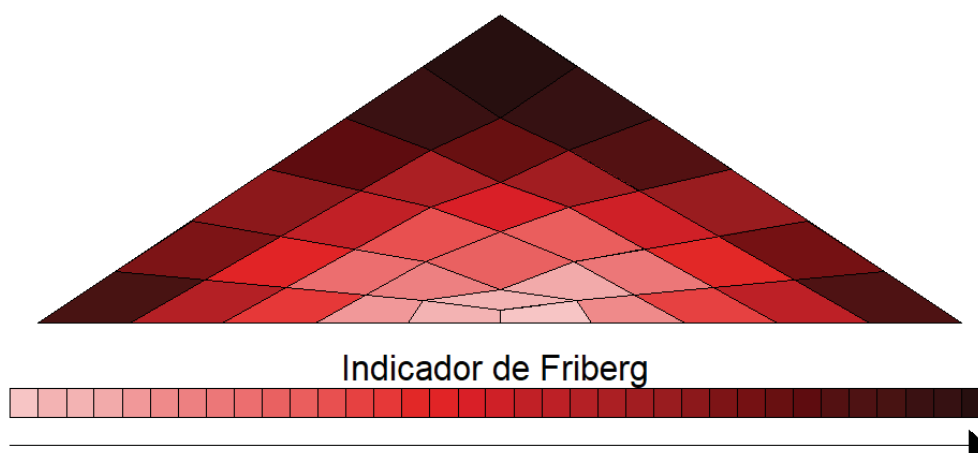
A malha apresentada contém elementos distorcidos, no entanto, espera-se que o efeito desses nos valores dos indicadores para as primeiras frequências seja equilibrado pelo aumento no número de elementos. Sendo assim, foram calculados novamente os indicadores para as frequências naturais. Valores negativos foram identificados a partir da 15ª frequência natural.

Partiu-se, a partir da nova malha proposta, para a análise de enriquecimento seletivo. Foram escolhidas como frequências alvo a 1ª e 4ª frequências naturais.

### 8.2.1 PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL COMO ALVO

Para a primeira frequência natural da estrutura foram calculados os indicadores de Friberg de cada elemento. Com base nesses, a sequência ideal de enriquecimento é indicada pela Figura 46.

Figura 46 - Barragem: Sequência de enriquecimento 1ª frequência



Essa sequência é indicada novamente na Tabela 39. Devido ao número de elementos, para facilitar a visualização, a coluna referente aos elementos enriquecidos conterá somente o último elemento enriquecido. Ou seja, a cada linha, são refinados o elemento da linha e todos os apresentados anteriormente. São apresentados os valores da soma do indicador de Friberg, o número de graus de liberdade, a frequência natural, a CA e o número de condição da matriz de massa a medida em que cada elemento é enriquecido.

Os resultados da Tabela 39 são plotados, para mais fácil interpretação na Figura 47 a Figura 49. Na Figura 47 a CA e a soma do Friberg dos elementos foram normalizadas em uma escala de zero a um. Nessa, a medida em que o gráfico progride, um número cada vez maior de pontos é observado. Isso evidencia que a maior parte da CA é obtida com um número pequeno de elementos. Para que se atinja 80% e 90% da CA são necessários, respectivamente, 7 e 10 elementos enriquecidos. Esses enriquecimentos equivalem a aproximadamente 60% e 73% da soma de Friberg. Sendo assim, 25 elementos são necessários para obter somente os últimos 10% de CA.

Essa influência significativa no refino de um baixo número de elementos é novamente evidenciada pela curva da Figura 48. Nessa, a CA é comparada com o número de graus de liberdade. Para atingir aproximadamente 90% da CA são necessários 670 graus de liberdade, valor esse que equivale a 36% dos 1862 graus de liberdade gerados por um enriquecimento de todos os elementos.

Tabela 39 - Barragem: Enriquecimento sequencial 1ª frequência

Elementos Enriquecidos	Soma Friberg	Graus de Liberdade	Frequência (rad/s)	CA	Número de Condição
6	0,001989	158	7,786893	29,242%	1,82E+11
5	0,003535	214	7,783745	38,264%	2,62E+11
12	0,005082	270	7,780702	46,982%	3,23E+11
35	0,005978	334	7,776669	58,536%	3,51E+11
1	0,006874	398	7,772648	70,060%	3,51E+11
4	0,007627	454	7,770745	75,510%	3,53E+11
18	0,008380	510	7,768836	80,980%	3,55E+11
11	0,009082	558	7,768023	83,309%	4,19E+11
2	0,009652	614	7,766913	86,490%	4,52E+11
30	0,010217	670	7,765793	89,700%	4,52E+11
24	0,010769	718	7,765626	90,178%	4,60E+11
3	0,011320	766	7,765478	90,602%	4,71E+11
10	0,011634	814	7,765130	91,600%	4,77E+11
17	0,011947	862	7,764796	92,557%	5,07E+11
34	0,012175	918	7,764450	93,548%	5,55E+11
7	0,012403	974	7,764108	94,528%	5,59E+11
23	0,012572	1022	7,763853	95,259%	5,59E+11
9	0,012739	1070	7,763597	95,993%	5,63E+11
16	0,012894	1118	7,763338	96,734%	5,91E+11
29	0,013040	1158	7,763214	97,089%	6,23E+11
8	0,013185	1198	7,763107	97,395%	6,44E+11
33	0,013291	1254	7,763008	97,679%	6,76E+11
13	0,013397	1310	7,762905	97,975%	6,88E+11
22	0,013502	1358	7,762790	98,304%	6,88E+11
15	0,013604	1406	7,762677	98,629%	6,93E+11
21	0,013673	1454	7,762596	98,861%	6,97E+11
28	0,013740	1494	7,762502	99,131%	7,42E+11
14	0,013803	1534	7,762448	99,283%	7,69E+11
27	0,013848	1582	7,762357	99,546%	7,70E+11
19	0,013892	1638	7,762337	99,603%	8,55E+11
32	0,013936	1686	7,762320	99,652%	9,78E+11
20	0,013972	1726	7,762291	99,735%	9,95E+11
26	0,014004	1774	7,762211	99,962%	1,01E+12
31	0,014022	1822	7,762198	99,999%	1,24E+12
25	0,014038	1862	7,762198	100,000%	1,58E+12

Figura 47 - Barragem: Relação soma de Friberg com CA 1ª frequência

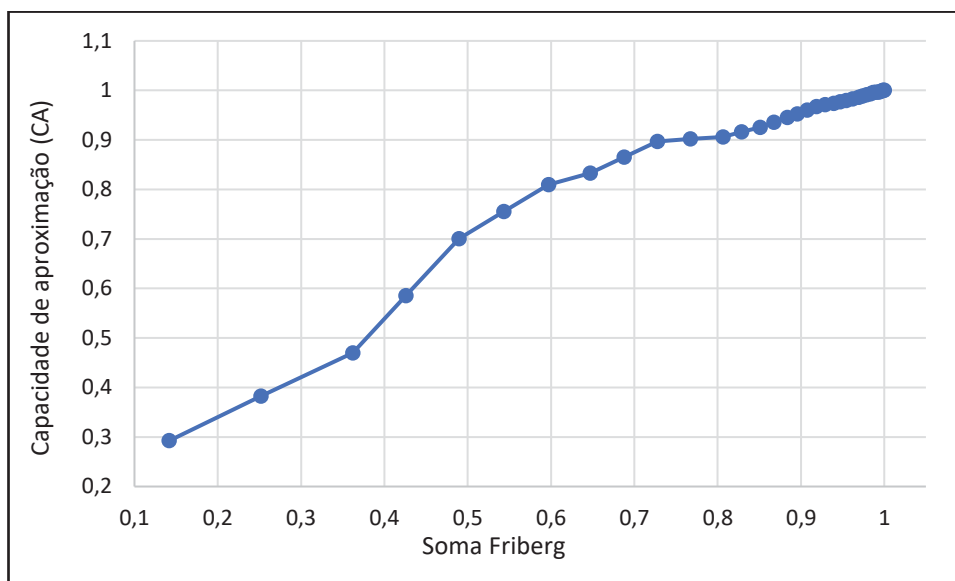
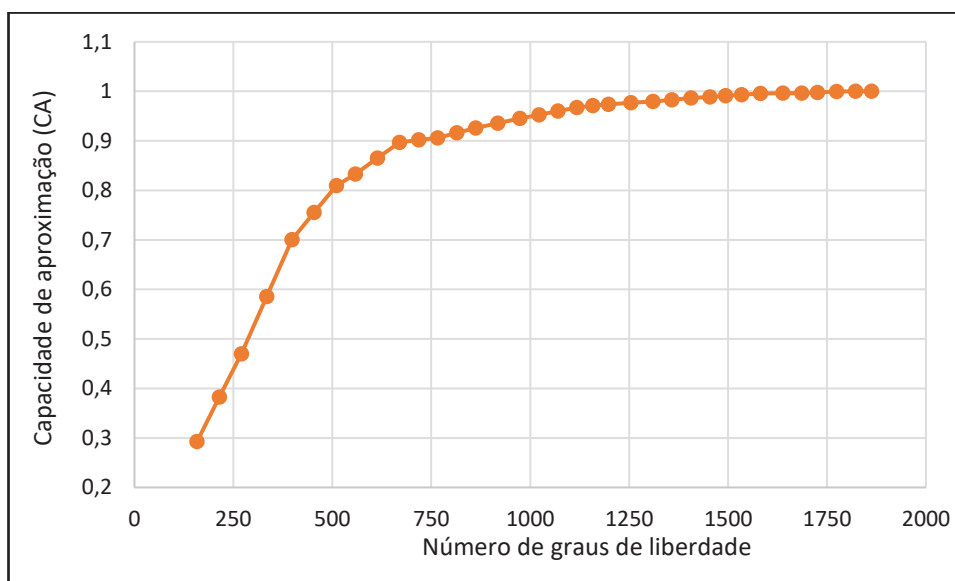


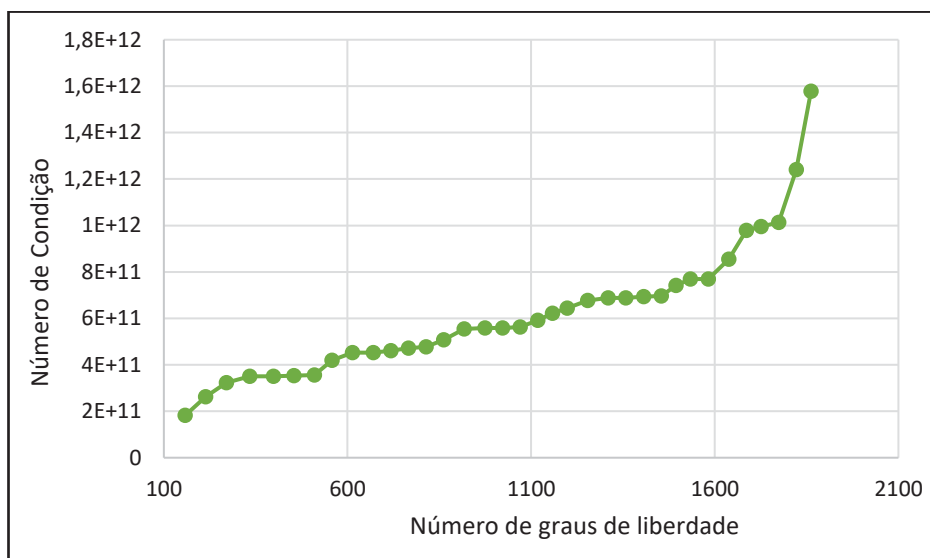
Figura 48 - Barragem: Relação número de graus de liberdade com CA 1ª frequência



A relação do número de graus de liberdade com o número de condição da matriz de massa é indicada na Figura 49. Nessa, percebe-se um crescimento relativamente constante do número de condição, até que se atinge o enriquecimento dos últimos elementos. Nesse trecho há um aumento mais rápido. No entanto, destaca-se, novamente, que o enriquecimento seletivo não tem um impacto significativo na magnitude do número de condição da matriz de massa.



Figura 49 - Barragem: Relação número de graus de liberdade com número de condição 1ª frequência



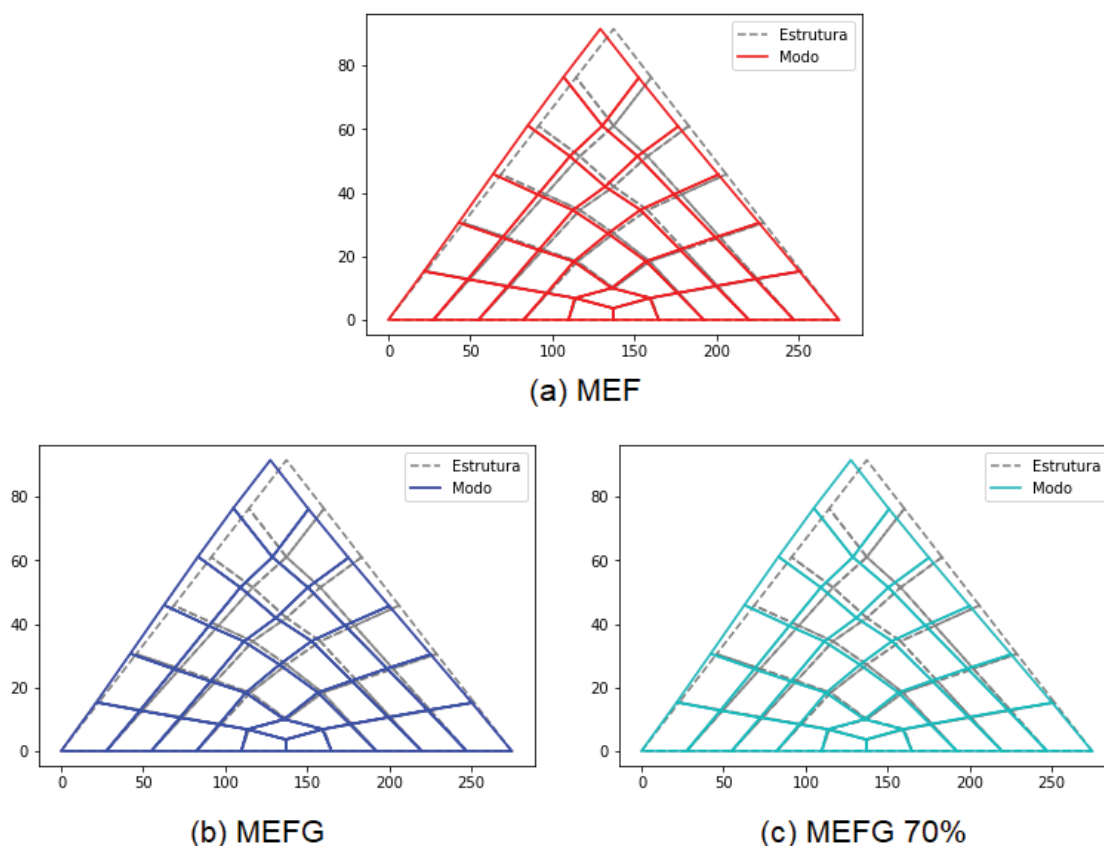
Como nos exemplos anteriores foram obtidos a frequência natural e modo de vibração do MEFG 70%. Os resultados da frequência obtida pelo MEFG 70%, pelo MEFG (enriquecimento de todos os elementos) e pelo MEF são indicados na Tabela 40. Nessa, o resultado obtido pela Referência 1 foi utilizado como base para o cálculo do erro, visto que esse foi o menor valor encontrado na literatura. Destaca-se que o MEFG 70% leva a uma CA de 89,7% daquela gerada pelo MEFG em relação ao MEF. Isso é obtido com apenas 36% do número de graus de liberdade do MEFG.

Tabela 40 - Barragem: Resultado comparativo 1ª frequência

	Frequência (rad/s)	Erro
MEF (94 g.l.)	7,797099	1,13%
MEFG (1862 g.l.)	7,762198	0,68%
MEFG 70% (670 g.l.)	7,765793	0,72%

O modo de vibração natural obtido considerando cada uma das três abordagens é apresentado na Figura 50. Observa-se que todos os métodos apresentaram o mesmo modo de vibração. Além disso, em cada figura foram plotadas também a estrutura original para facilitar a visualização do modo.

Figura 50 - Barragem: 1º modo de vibração natural



Por fim foi analisado o tempo computacional necessário para solucionar o problema considerando o MEFG e o MEFG 70%. Os resultados obtidos são indicados na Tabela 41. Percebe-se que o tempo final do MEFG 70% é equivalente à aproximadamente 37% do tempo do MEFG. Os resultados desse exemplo, em relação aos apresentados no item 8.1, demonstram que quanto maior o número de elementos da malha, mais o tempo computacional exigido para solucionar o problema de MEFG supera o tempo agregado pelo cálculo do indicador.

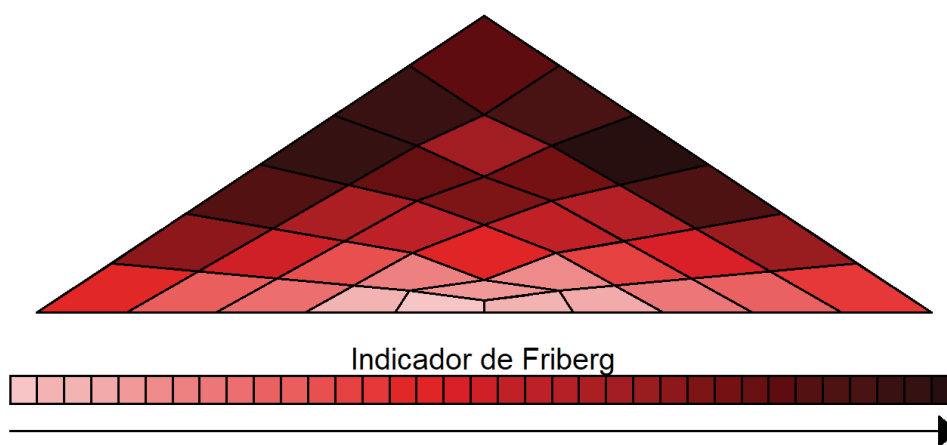
Tabela 41 - Barragem: Tempo computacional

	Montar Matrizes (s)	Cálculo indicadores (s)	Solução (s)	Total (s)
MEFG	33,026	-	67,106	100,132
MEFG 70%	33,026	2,345	1,930	37,301

### 8.2.2 QUARTA FREQUÊNCIA NATURAL COMO ALVO

Para finalizar a análise da barragem de terra o mesmo procedimento realizado no item 8.2.1 foi realizado para a 4ª frequência natural da estrutura. Iniciou-se pela determinação da sequência de enriquecimento através do cálculo dos indicadores de Friberg. Essa sequência é indicada na Figura 51.

Figura 51 - Barragem: Sequência de enriquecimento 4ª frequência



Seguindo a sequência sinalizada pelos indicadores, calculou-se o valor da soma dos indicadores dos elementos refinados, o número de graus de liberdade, a frequência obtida, a CA que essa representa em relação ao enriquecimento total e o número de condição da matriz de massa para cada passo de enriquecimento. Os resultados obtidos são indicados na Tabela 42. Os resultados dessa são plotados na Figura 52 a Figura 54.

Tabela 42 – Barragem: Enriquecimento sequencial 4ª frequência

Elementos Refinados	Soma Friberg	Graus de Liberdade	Frequência (rad/s)	CA	Número de Condição
4	0,036444	158	20,217200	25,334%	1,38E+11
18	0,072888	222	19,750580	43,725%	1,40E+11
12	0,108171	278	19,581529	50,387%	2,25E+11
5	0,143454	334	19,359158	59,152%	2,47E+11
3	0,169775	390	19,249908	63,457%	3,01E+11
24	0,195787	446	19,143821	67,639%	3,02E+11
6	0,217834	494	19,107840	69,057%	3,65E+11
17	0,237025	550	18,974162	74,325%	3,84E+11
10	0,256216	606	18,822261	80,312%	3,94E+11
16	0,272153	654	18,797195	81,300%	4,19E+11
30	0,287760	710	18,761790	82,695%	4,20E+11
2	0,303274	766	18,729745	83,958%	4,23E+11
11	0,318297	798	18,729672	83,961%	5,50E+11
23	0,330472	846	18,664171	86,543%	5,74E+11
9	0,342606	894	18,600961	89,034%	5,90E+11
22	0,352369	942	18,559440	90,670%	6,17E+11
15	0,362086	990	18,507229	92,728%	6,51E+11
29	0,370957	1038	18,470471	94,177%	6,54E+11
8	0,379732	1086	18,433792	95,622%	6,59E+11
21	0,387420	1134	18,424700	95,981%	6,78E+11
35	0,391494	1190	18,408412	96,623%	6,78E+11
1	0,395568	1246	18,392579	97,247%	6,78E+11
14	0,398995	1294	18,376671	97,874%	6,96E+11
28	0,402417	1342	18,357486	98,630%	7,00E+11
34	0,405628	1390	18,355724	98,699%	7,00E+11
7	0,408839	1438	18,354028	98,766%	7,07E+11
31	0,411371	1486	18,347331	99,030%	7,42E+11
13	0,413903	1534	18,340058	99,317%	7,69E+11
27	0,415678	1582	18,335100	99,512%	7,70E+11
20	0,417421	1630	18,330877	99,678%	7,90E+11
26	0,418168	1678	18,325588	99,887%	8,05E+11
19	0,418831	1726	18,324284	99,938%	1,01E+12
32	0,419494	1774	18,322854	99,995%	1,01E+12
25	0,419785	1822	18,322783	99,998%	1,36E+12
31	0,420066	1862	18,322720	100,00%	1,58E+12

Figura 52 - Barragem: Relação soma de Friberg com CA 4ª frequência

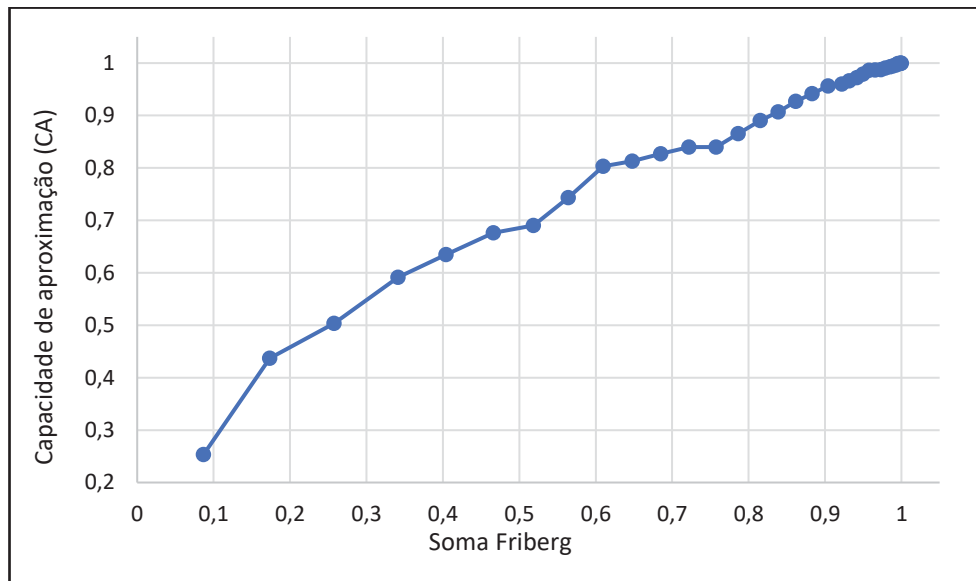


Figura 53 - Barragem: Relação número de graus de liberdade com CA 4ª frequência

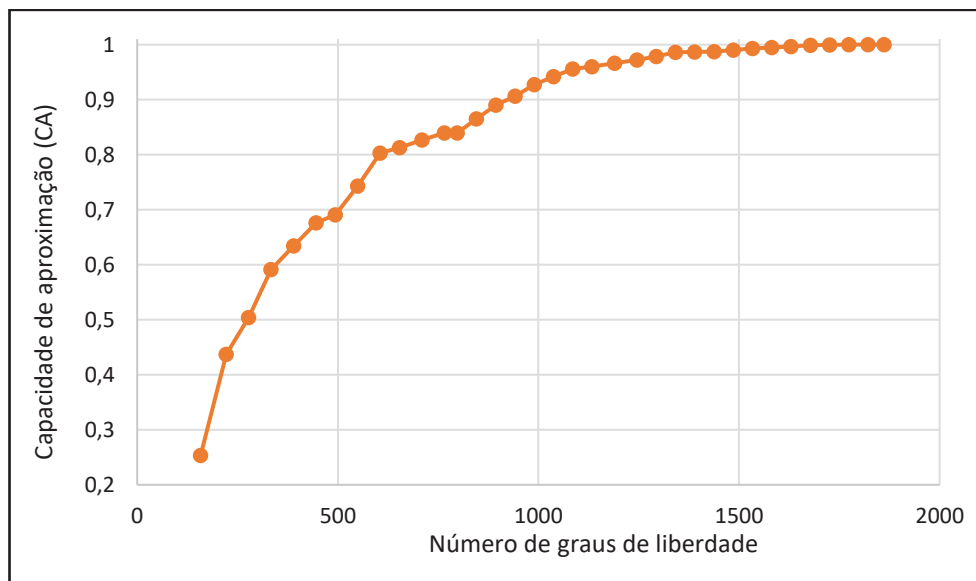
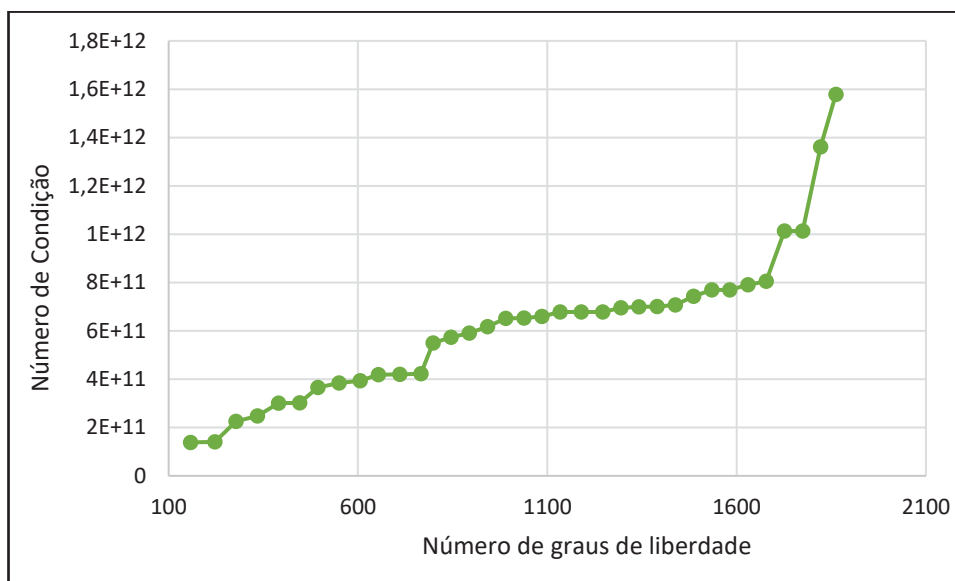


Figura 54 - Barragem: Relação número de graus de liberdade com número de condição 4ª frequência



Os resultados obtidos reiteram as análises realizadas para a 1ª frequência natural, visto que os gráficos apresentam um comportamento muito similar ao exemplo 8.2.1. No presente exemplo, capacidades de aproximação de 80% e 90% foram obtidas com aproximadamente 60% e 83% da soma de Friberg. Tais resultados são obtidos com 606 e 942 graus de liberdade, respectivamente.

Esses mesmos níveis de CA para a 1ª frequência eram obtidos com somas de Friberg de aproximadamente 60% e 73%, e, 510 e 670 graus de liberdade, respectivamente. Esse comportamento é interessante pois apresenta similaridade com os resultados do exemplo da chapa quadrada do item 8.1. Isso porque, nesse último também pode-se observar que frequências mais altas exigem um maior número de elementos enriquecidos para atingirem os mesmos resultados de CA de frequências mais baixas.

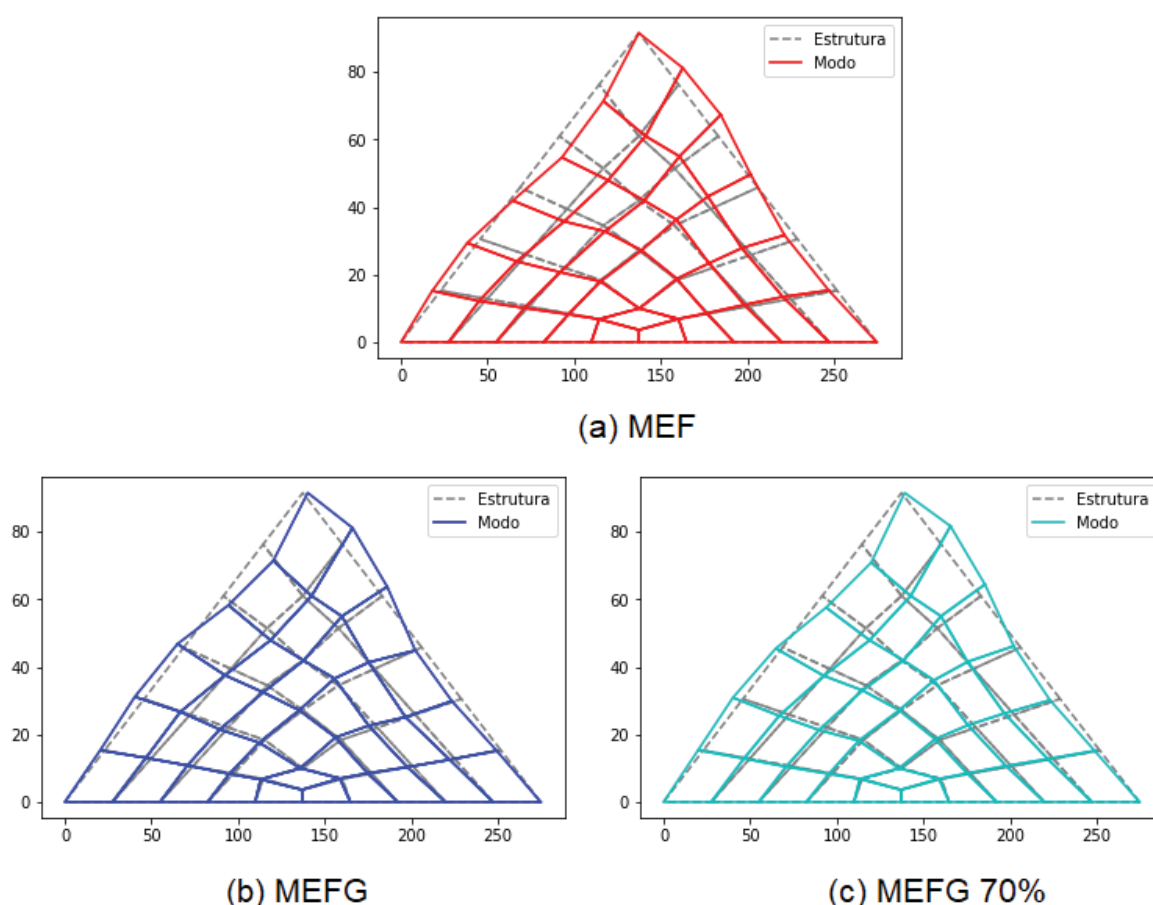
Em sequência foram obtidos os resultados de frequência natural e modo de vibração para o MEF, MEFG e MEFG 70%. Os resultados de frequência são apresentados na Tabela 43. Nessa não são indicados valores de erros uma vez que a solução de MEFG é mais precisa do que as de referência. Sendo assim, é apresentada a CA em relação à variação total entre o MEFG e o MEF. O MEFG 70% obteve aproximadamente 84% da CA do MEFG com apenas 41% dos graus de liberdade.

Tabela 43 - Barragem: Resultado comparativo 4ª frequência

	Frequência (rad/s)	CA
MEF (94 g.l.)	20,859999	0,00%
MEFG (1862 g.l.)	18,322719	100,00%
MEFG 70% (766 g.l.)	18,729745	83,96%

Os modos de vibração obtidos pelo MEF, MEFG e MEFG 70% são apresentados na Figura 55. A estrutura original é plotada para evidenciar o modo.

Figura 55 - Barragem: 4º modo natural de vibração



Por fim, foi calculado o tempo computacional necessário para analisar o problema pelo MEFG e pelo MEFG 70%. Os resultados são indicados na Tabela 44. O tempo computacional exigido pelo MEFG 70% é de aproximadamente 38% do tempo computacional exigido pelo MEFG total.

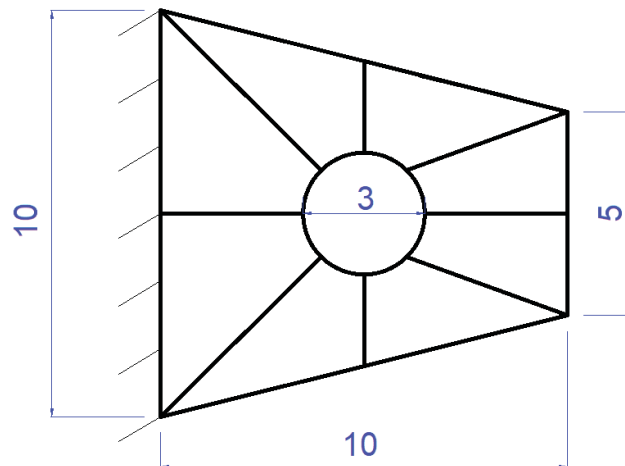
Tabela 44 - Barragem: Tempo computacional

	Montar Matrizes (s)	Cálculo indicadores (s)	Solução (s)	Total (s)
MEFG	33,026	-	67,106	100,132
MEFG 70%	33,026	2,345	3,069	38,440

### 8.3 CHAPA COM FURO CIRCULAR

O terceiro exemplo analisado foi o de uma chapa com furo central circular, sujeita ao estado plano de tensão, originalmente proposta por Zhao e Steven (1996). A estrutura possui módulo de elasticidade  $E = 1 \text{ N/m}^2$ , massa específica  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e espessura unitária. A estrutura, suas dimensões em metros e a malha utilizada são indicadas na Figura 56.

Figura 56- Chapa com furo circular



Os resultados obtidos pelo MEFG,  $\beta = \pi$ , são apresentados na Tabela 45. São indicados também os resultados obtidos por Zhao e Steven (1996) através de uma solução assintótica de MEF e as soluções de referência utilizadas pelos mesmos autores. A solução de referência proposta pelos autores foi obtida por uma malha como alto nível de discretização. Entretanto, os autores não especificam quantos elementos foram utilizados.

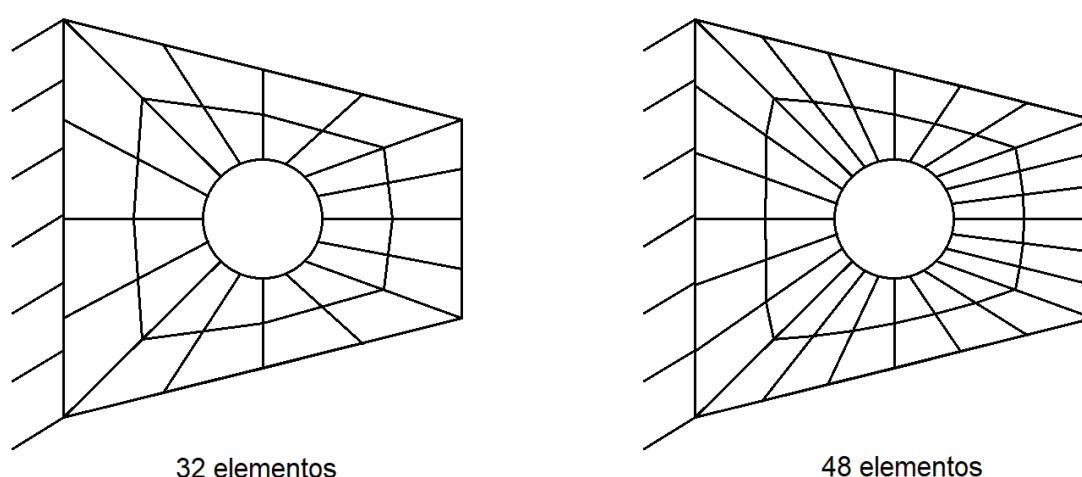


Tabela 45 - Frequências naturais (rad/s)

Frequência	Referência	Zhao e Steven (32 g.l.)	MEFG (480 g.l.)
1	0,0744	0,0833	0,0672
2	0,1648	0,1661	0,1569
3	0,2055	0,2334	0,1985
4	0,2939	0,3302	0,2407
5	0,3243	0,3525	0,2730
6	0,4399	0,4234	0,3818
7	0,4482	0,4624	0,4147
8	0,4973	0,4805	0,4393
9	0,5332	0,5508	0,4705
10	0,5485	0,5578	0,5211

Percebe-se que as frequências obtidas pelo MEFG apresentam valores menores do que os da solução de referência. Como todos os elementos têm sua geometria modelada com polinômios lineares, é possível que a má aproximação da geometria esteja levando a erros na aproximação. Sendo assim, para verificar se esse é de fato o problema, a estrutura foi modelada com duas malhas mais refinadas, uma com 32 e outra com 48 elementos. Tais malhas são indicadas na Figura 57.

Figura 57 - Chapa com furo: Malha 32 e 48 elementos



Os resultados obtidos pelas três malhas avaliadas são indicados na Tabela 46. Evidencia-se que à medida que a geometria é melhor aproximada a resposta de

MEFG assume valores maiores e se aproxima da solução de referência. Comprova-se, assim, que o uso de elementos subparamétricos de 4 nós, para esse exemplo, comprometemos a precisão da solução. O uso desses deve ser combinado com malhas refinadas o suficiente para aproximar bem o contorno.

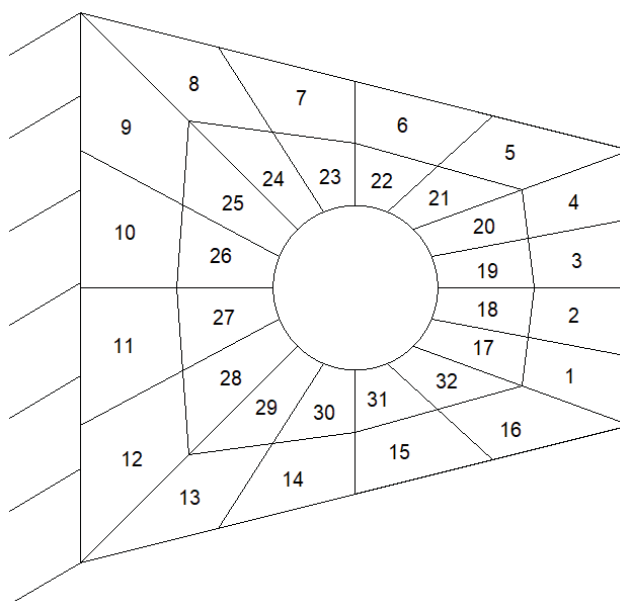
Tabela 46 - Frequências obtidas pelo MEFM com diferentes malhas – Chapa com furo

Frequência	Referência	8 elementos	32 elementos	48 elementos
1	0,0744	0,0672	0,0699	0,0701
2	0,1648	0,1569	0,1556	0,1561
3	0,2055	0,1985	0,1992	0,1999
4	0,2939	0,2407	0,2615	0,2625
5	0,3243	0,2730	0,2917	0,2923
6	0,4399	0,3818	0,4172	0,4199
7	0,4482	0,4147	0,4195	0,4209
8	0,4973	0,4393	0,4626	0,4682
9	0,5332	0,4705	0,4795	0,4809
10	0,5485	0,5211	0,5252	0,5283

No entanto, o foco deste trabalho é avaliar o uso do indicador de Friberg como guia para o processo de enriquecimento seletivo e não, necessariamente, obter resultados mais precisos de frequências naturais. Desse modo, a malha de 32 elementos será utilizada para avaliação do problema. Essa é indicada, com a numeração de elementos adotada na Figura 58.

Para o presente exemplo serão detalhados o enriquecimento seletivo da 1ª e 5ª frequências naturais. O procedimento de análise será o mesmo aplicado para os exemplos 8.1 e 8.2.

Figura 58 - Chapa com furo: Malha 32 elementos

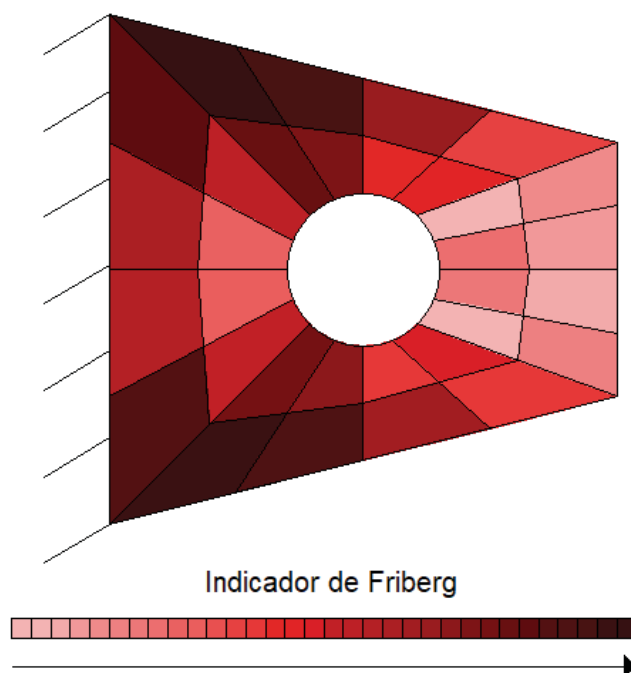


### 8.3.1 PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL COMO ALVO

O primeiro passo realizado para a análise da 1ª frequência natural foi o cálculo dos indicadores de Friberg quando cada elemento é enriquecido individualmente. Os resultados obtidos indicam a sequência de elementos que mais impactam a solução global. A sequência obtida é indicada na Figura 59.

Seguindo a sequência indicada, calculou-se o valor da soma dos indicadores dos elementos refinados, o número de graus de liberdade, a frequência obtida, a CA que essa representa em relação ao enriquecimento total e o número de condição da matriz de massa para cada passo de enriquecimento. Os resultados obtidos são indicados na Tabela 47. Essa é organizada na mesma maneira que suas correspondentes no exemplo 8.2. Os resultados apresentados são plotados na Figura 60 a Figura 62.

Figura 59 - Chapa com furo: Sequência de enriquecimento 1ª frequência



O comportamento apresentado na Figura 60 a Figura 62 é muito similar ao observado no exemplo 8.2. Na Figura 60 a CA tem comportamento quase linear à medida que se aumenta a soma de Friberg. No entanto, à medida que se percorre a curva, a proximidade entre os pontos aumenta. Isso indica que a maior parte da CA é atingida com a menor parte dos elementos enriquecidos. Esse comportamento é refletido na relação da CA com o número de graus de liberdade, indicado pela Figura 61.

Quanto ao número de condição, esse não aparenta ter uma relação bem estabelecida com o aumento de elementos enriquecidos em um mesmo nível de enriquecimento. A magnitude desse pouco varia a medida em que mais elementos são refinados. No entanto, para esse caso em específico, destaca-se que o enriquecimento dos últimos elementos pouco influencia o número de condição.

Tabela 47 - Chapa com furo: Enriquecimento sequencial 1ª frequência

Elementos Enriquecidos	Soma Friberg	Graus de Liberdade	Frequência (rad/s)	CA	Número de Condição
8	0,015995	160	0,075173	13,817%	1,41E+11
13	0,031722	224	0,074333	27,485%	1,42E+11
7	0,045651	280	0,073948	33,739%	2,08E+11
14	0,058447	336	0,073573	39,851%	2,35E+11
12	0,071226	392	0,073250	45,104%	3,16E+11
9	0,084005	448	0,072920	50,478%	3,18E+11
24	0,095413	504	0,072592	55,815%	3,87E+11
29	0,105620	560	0,072294	60,658%	4,03E+11
23	0,114365	608	0,072124	63,433%	5,79E+11
30	0,121370	656	0,072036	64,850%	6,85E+11
6	0,128071	712	0,071652	71,110%	6,85E+11
15	0,134441	768	0,071281	77,149%	6,89E+11
10	0,139637	824	0,071212	78,269%	7,34E+11
11	0,144834	872	0,071178	78,823%	7,62E+11
25	0,149415	920	0,071080	80,406%	7,66E+11
28	0,153996	968	0,070982	82,007%	7,99E+11
32	0,157753	1032	0,070707	86,487%	8,05E+11
21	0,161510	1096	0,070398	91,512%	8,05E+11
22	0,165071	1136	0,070379	91,821%	9,38E+11
16	0,168594	1184	0,070338	92,479%	9,38E+11
5	0,172116	1232	0,070298	93,138%	9,95E+11
31	0,175600	1272	0,070281	93,417%	1,16E+12
27	0,177606	1320	0,070182	95,030%	1,17E+12
26	0,179612	1360	0,070164	95,326%	1,17E+12
19	0,181356	1424	0,070048	97,210%	1,17E+12
18	0,183101	1480	0,070000	97,984%	1,17E+12
1	0,184380	1536	0,069959	98,657%	1,17E+12
4	0,185659	1592	0,069920	99,293%	1,17E+12
3	0,186936	1640	0,069899	99,638%	1,17E+12
2	0,188212	1680	0,069897	99,658%	1,17E+12
17	0,189070	1720	0,069887	99,827%	1,20E+12
20	0,189928	1760	0,069876	100,000%	1,21E+12

Figura 60 - Chapa com furo: Relação soma de Friberg com CA 1ª frequência

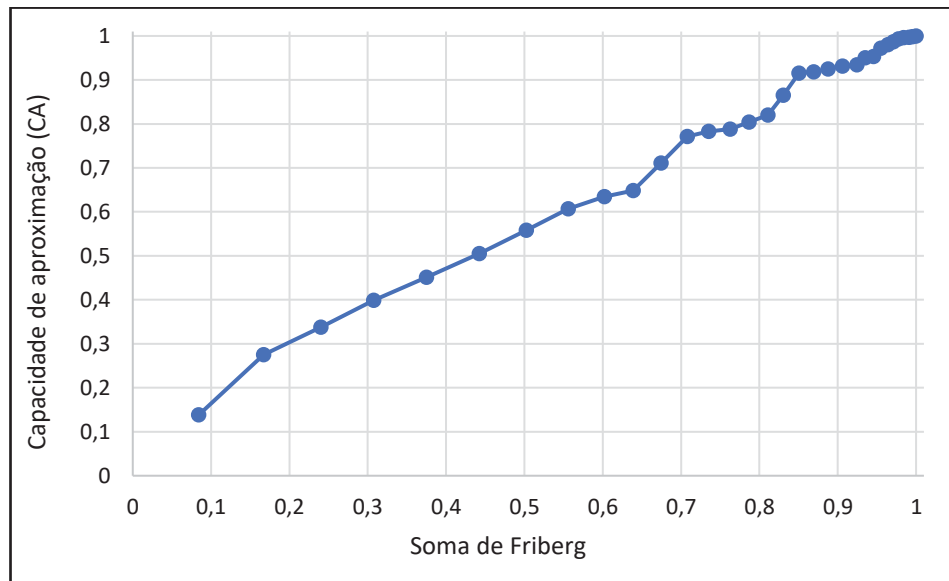


Figura 61 - Chapa com furo: Relação número de graus de liberdade com CA 1ª frequência

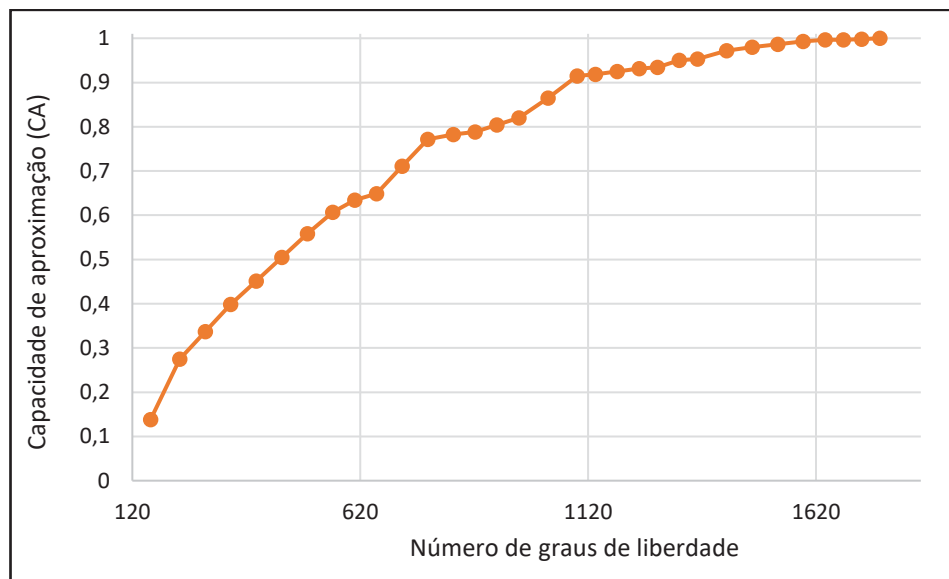
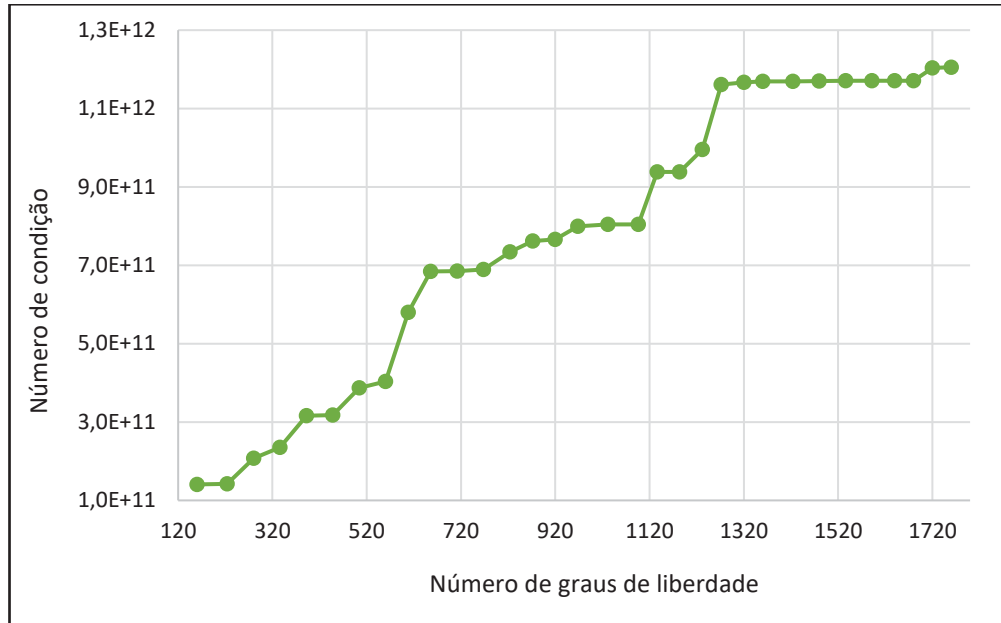
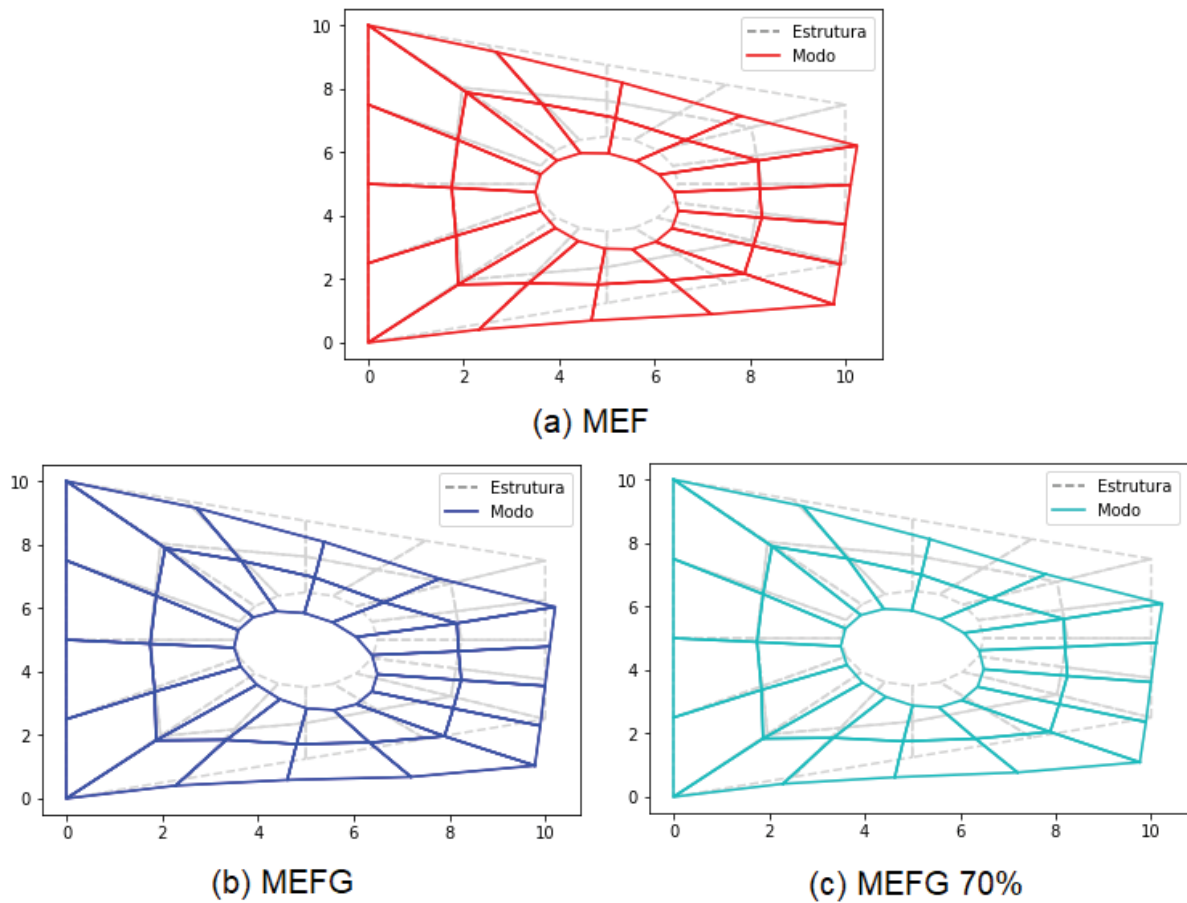


Figura 62 - Chapa com furo: Relação número de graus de liberdade com número de condição 1ª frequência



Como nos exemplos anteriores, foram avaliados os resultados obtidos pelo MEFG 70%. Nesse caso, o MEFG 70% leva a uma CA de aproximadamente 77% em relação ao MEFG. Esse resultado é obtido com 768 graus de liberdade, que representa 44% dos graus de liberdade do MEFG. Os modos naturais de vibração para a 1ª frequência obtidos através do MEF, MEFG e MEFG 70% são indicados na Figura 63.

Figura 63 - Chapa com furo: 1º modo natural de vibração



Por fim, foi realizada a comparação de tempo computacional do MEFG e do MEFG 70%. Os resultados obtidos são indicados na Tabela 48. O ganho de tempo computacional necessário para solucionar o problema compensa o tempo computacional agregado pelo cálculo dos indicadores. O tempo do MEFG 70%, nesse caso, é inferior a 40% do tempo do MEFG.

Tabela 48 - Chapa com furo: Tempo computacional

	Montar Matrizes (s)	Cálculo Indicadores (s)	Solução (s)	Total (s)
MEFG	26,993	-	60,605	87,598
MEFG 70%	26,993	2,016	3,515	32,524



### 8.3.2 QUINTA FREQUÊNCIA NATURAL COMO ALVO

Partindo-se da quinta frequência como alvo, a sequência ideal de enriquecimento obtida através dos indicadores de Friberg é indicada na Figura 64. Com base nessa foi realizado o enriquecimento seletivo e sequencial da malha. Os resultados obtidos de soma dos indicadores dos elementos refinados, número de graus de liberdade, frequências obtidas, CA que essas representam em relação ao enriquecimento total e do número de condição da matriz de massa para cada passo de enriquecimento são indicados na Tabela 49.

Os resultados obtidos na Tabela 49, são representados na Figura 65 a Figura 67. Essas indicam, respectivamente, a relação da soma dos indicadores de Friberg com a CA, a relação no número de graus de liberdade com a CA e a relação do número de graus de liberdade com o número de condição da matriz de massa. A CA e a soma dos indicadores foram normalizadas em uma escala de zero a um.

Figura 64 - Chapa com furo: Sequência de enriquecimento 5ª frequência

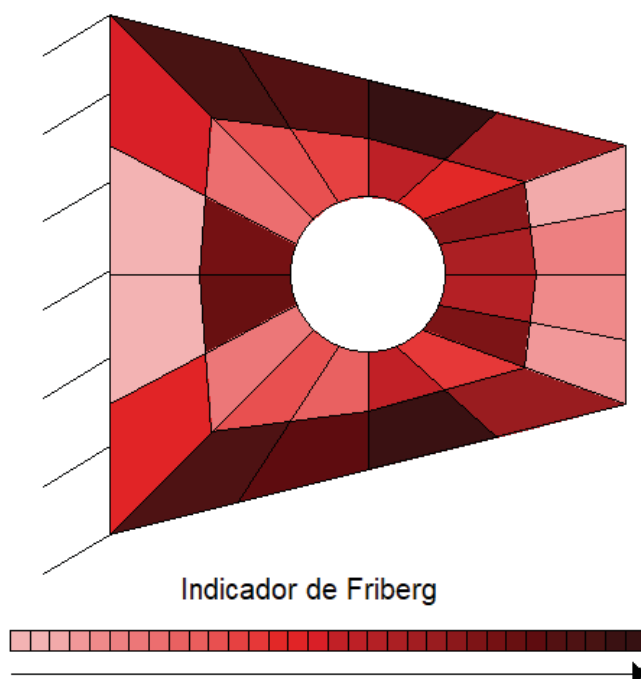


Tabela 49 - Chapa com furo: Enriquecimento sequencial 5ª frequência

Elementos Enriquecidos	Soma Friberg	Graus de Liberdade	Frequência (rad/s)	CA	Número de Condição
6	0,020959	160	0,318898	14,515%	1,36E+11
15	0,041709	224	0,314230	29,209%	1,37E+11
8	0,056795	288	0,311244	38,608%	1,84E+11
13	0,071823	352	0,308227	48,105%	1,86E+11
7	0,084920	400	0,306844	52,456%	2,51E+11
14	0,096522	448	0,305634	56,265%	3,00E+11
27	0,105093	512	0,303823	61,966%	3,01E+11
26	0,113664	568	0,303274	63,693%	3,50E+11
17	0,120814	632	0,301354	69,736%	3,50E+11
20	0,127965	696	0,299532	75,472%	3,50E+11
16	0,134433	752	0,298412	78,997%	3,50E+11
5	0,140901	808	0,297116	83,077%	3,50E+11
19	0,147147	864	0,296488	85,051%	4,77E+11
18	0,153393	912	0,296081	86,334%	6,14E+11
22	0,159203	968	0,295673	87,618%	6,14E+11
31	0,164621	1024	0,295388	88,516%	6,15E+11
9	0,169779	1080	0,294875	90,130%	7,71E+11
12	0,174936	1136	0,294390	91,655%	7,78E+11
21	0,180045	1176	0,294177	92,327%	9,13E+11
32	0,185155	1216	0,293962	93,004%	9,20E+11
23	0,190083	1264	0,293583	94,195%	9,54E+11
24	0,194759	1312	0,293091	95,743%	9,63E+11
29	0,199286	1368	0,292767	96,764%	9,66E+11
30	0,203689	1408	0,292638	97,171%	1,09E+12
25	0,208090	1448	0,292546	97,461%	1,09E+12
28	0,212491	1488	0,292474	97,686%	1,10E+12
3	0,216325	1544	0,292203	98,540%	1,10E+12
2	0,220160	1592	0,291976	99,255%	1,10E+12
1	0,223277	1632	0,291909	99,463%	1,11E+12
4	0,226394	1672	0,291843	99,672%	1,11E+12
11	0,228038	1720	0,291770	99,903%	1,17E+12
10	0,229683	1760	0,291739	100,000%	1,21E+12

Figura 65 - Chapa com furo: Relação soma de Friberg com CA 5ª frequência

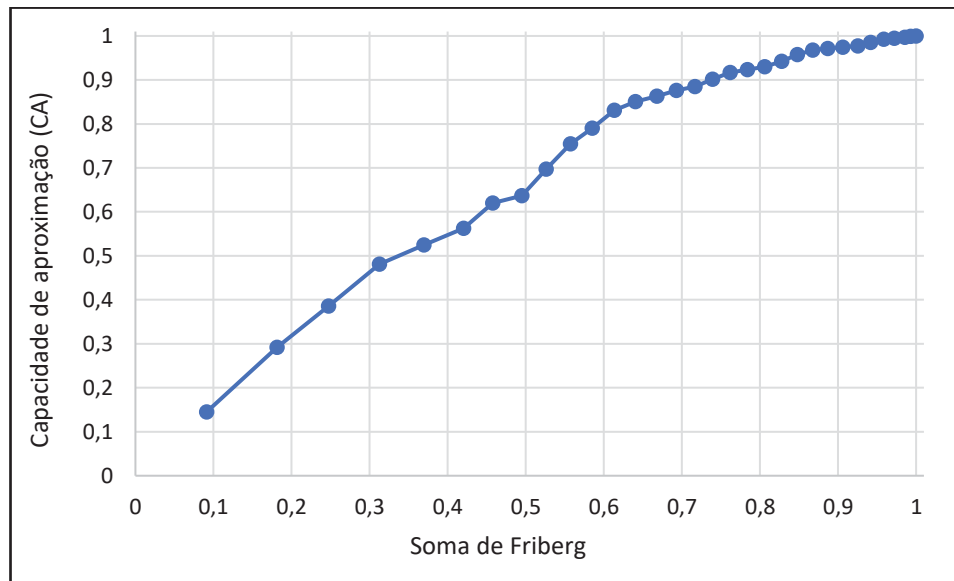


Figura 66 - Chapa com furo: Relação número de graus de liberdade com CA 5ª frequência

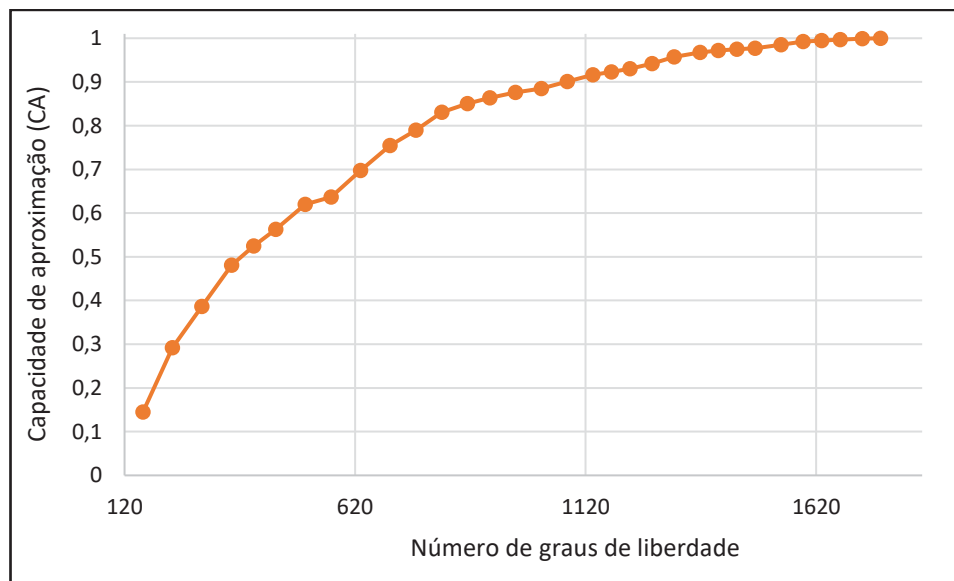
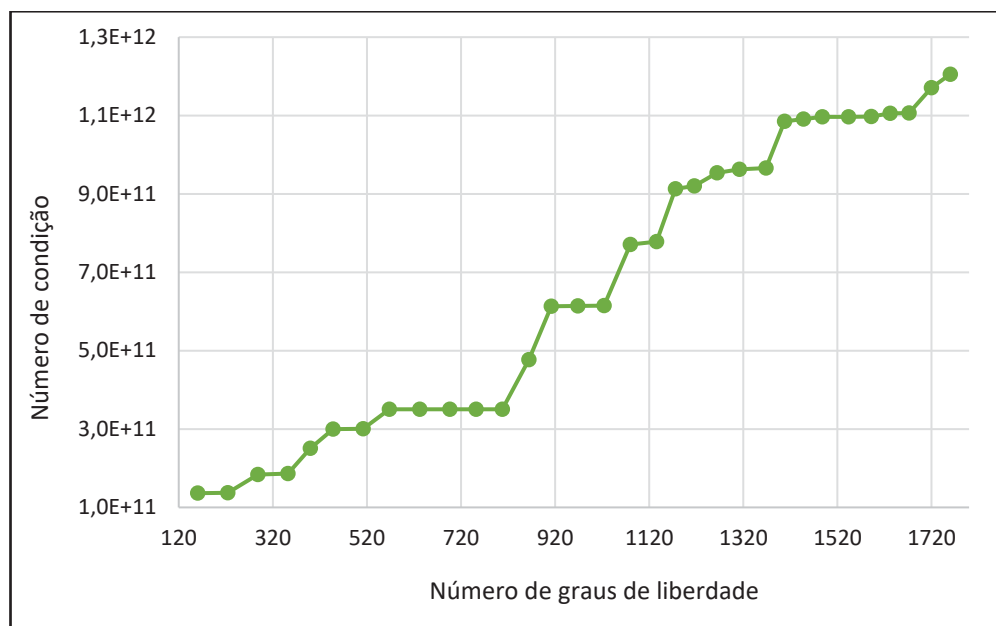


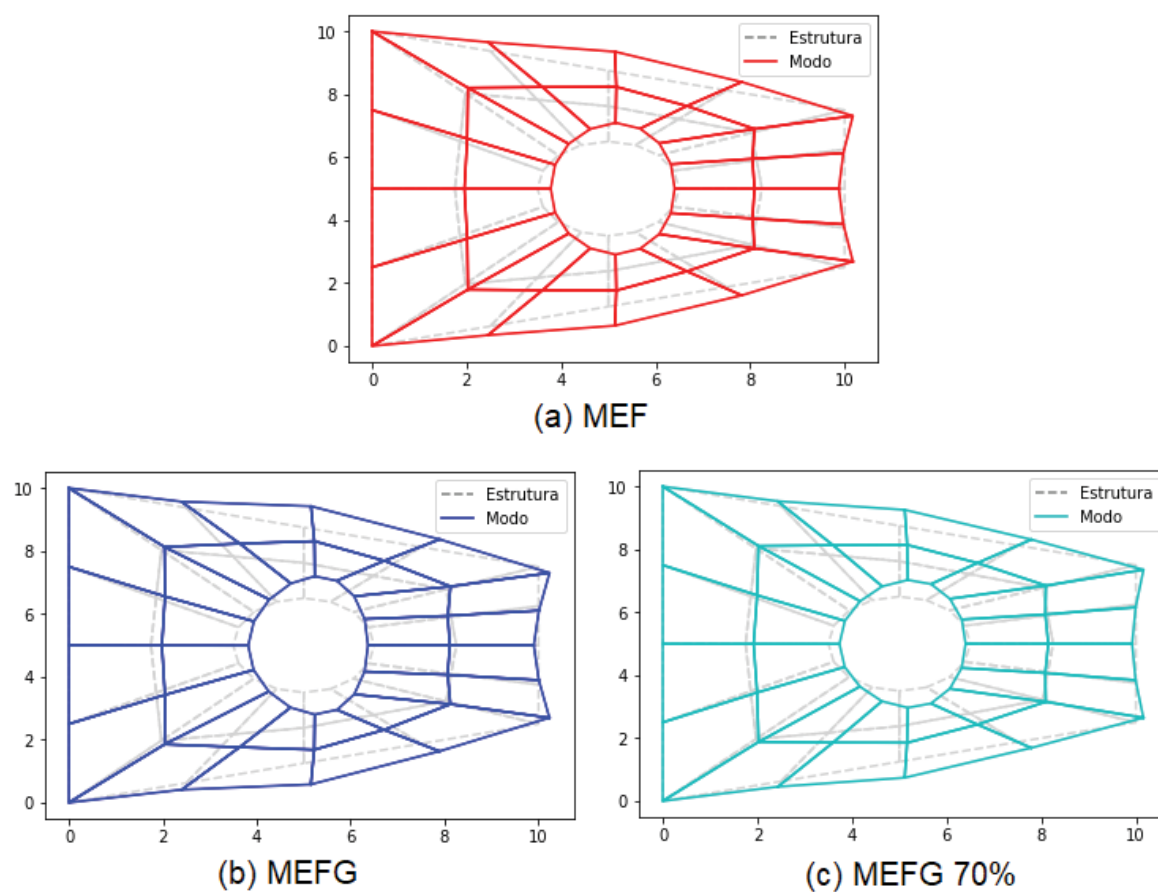
Figura 67 - Chapa com furo: Relação número de graus de liberdade com número de condição 5ª frequência



Os resultados obtidos reforçam as conclusões obtidas a respeito da 1ª frequência natural apresentada no item 8.3.1. Assim como nesse último, foram obtidos os resultados de frequência natural e modo natural de vibração para o MEFG 70%. Para a quinta frequência, o MEFG 70% leva a uma CA de aproximadamente 88%. Essa CA é atingida com o uso de 1024 graus de liberdade. Esse valor representa 58% do número de graus de liberdade necessários para a análise tradicional de MEFG.

O quinto modo natural de vibração, obtido através do MEF, MEFG e MEFG 70%, é indicado na Figura 68. Observa-se que os três procedimentos obtiveram o mesmo modo.

Figura 68 - Chapa com furo: 5º modo natural de vibração



A última análise realizada foi relativa ao tempo computacional exigido pelo MEFG e pelo MEFG 70%. Os resultados são apresentados na Tabela 50. Esses indicam que o tempo exigido pelo MEFG 70% é igual a 45% do exigido pelo MEFG.

Tabela 50 - Chapa com furo: Tempo computacional

	Montar Matrizes (s)	Cálculo Indicadores (s)	Solução (s)	Total (s)
MEFG	26,993	-	60,605	87,598
MEFG 70%	26,993	2,016	10,474	39,483

## 9 ENRIQUECIMENTO SELETIVO NA ANÁLISE TRANSIENTE

Com base nas conclusões obtidas nos itens anteriores, partiu-se para a análise transiente de estruturas sujeitas ao estado plano de tensões. As respostas de deslocamento, velocidade e aceleração foram obtidas inicialmente através do MEFG enriquecendo todos os elementos da malha e considerando o uso completo da matriz modal.

Em seguida o fator de influência proposto por Debella (2018) foi calculado e a resposta foi obtida condensando a matriz modal para conter somente os modos cujo fator de influência fosse igual ou maior do que 0,01. Essa solução reduzida será referenciada como MEFG R.

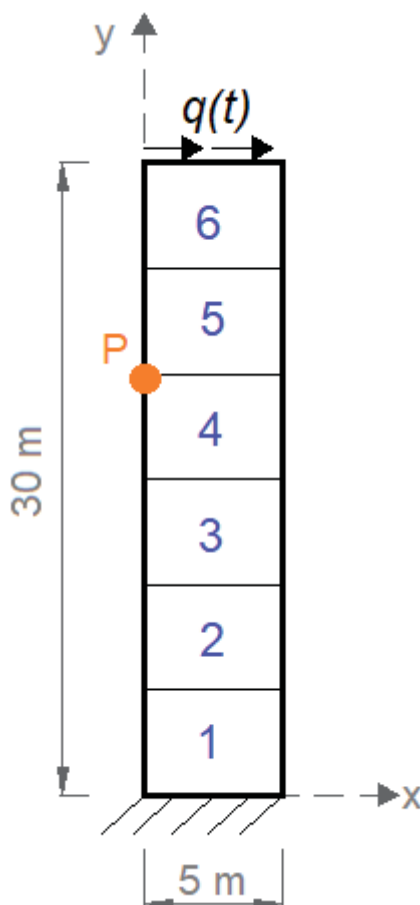
Por fim, foi proposto um processo reduzido seletivo no qual, além da condensação da matriz modal, o enriquecimento do MEFG é aplicado seletivamente em um número reduzido de elementos da malha. Esse procedimento foi nomeado MEFG RS. O enriquecimento seletivo foi realizado com base nas sequências determinadas pelo indicador de Friberg. Tendo em vista que a mínima CA obtida pelo MEFG 70%, proposto no capítulo 8, foi de 77% e que a média nas análises foi de aproximadamente 85%, esse parâmetro será utilizado no enriquecimento seletivo.

### 9.1 CARREGAMENTO HARMÔNICO

Para analisar o comportamento de uma estrutura sujeita a um carregamento harmônico foi avaliada a estrutura indicada na Figura 69. Nessa figura também é indicada a malha, numeração de elementos utilizada e o ponto P de coordenadas (0;20). As propriedades materiais foram tomadas como  $E = 20 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,2$  e  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ . A viga parede tem espessura  $t = 1\text{m}$  e possui no topo um carregamento aplicado  $q(t)$  dado por:

$$q(t) = 10 \text{ sen}(50t) \quad (132)$$

Figura 69 - Estrutura sujeita a carregamento harmônico



O problema foi resolvido através do Método de Newmark aceleração constante com um passo de tempo igual a  $\Delta t = 5 \times 10^{-4} s$ . As soluções obtidas através do MEFG consideraram o uso de  $\beta = 2\pi$ . Esse valor foi adotado para que as respostas pudessem ser validadas com as apresentadas por Torii (2012). As soluções de referência propostas por esse autor, obtidas pelo MEFH com uso de polinômios de Lobatto de grau 9, foram utilizadas como referência.

Iniciou-se a análise pela obtenção dos fatores de influência de cada um dos modos obtidos. O resultado obtido é indicado na Figura 70. Os resultados obtidos são apresentados novamente na Figura 71. Nessa última, a imagem foi aproximada e uma barra vermelha indica o corte no valor de 0,01.

Desse modo, evidencia-se que o primeiro e o segundo modos são os únicos cujas influências superam 0,01. Juntos, esses representam 98,5% da influência

modal. Sendo assim, o MEFG R foi aplicado ao problema considerando apenas esses dois modos. Destaca-se que a análise completa de MEFG conta com 360 modos.

Figura 70 - Carregamento harmônico: Fator de influência

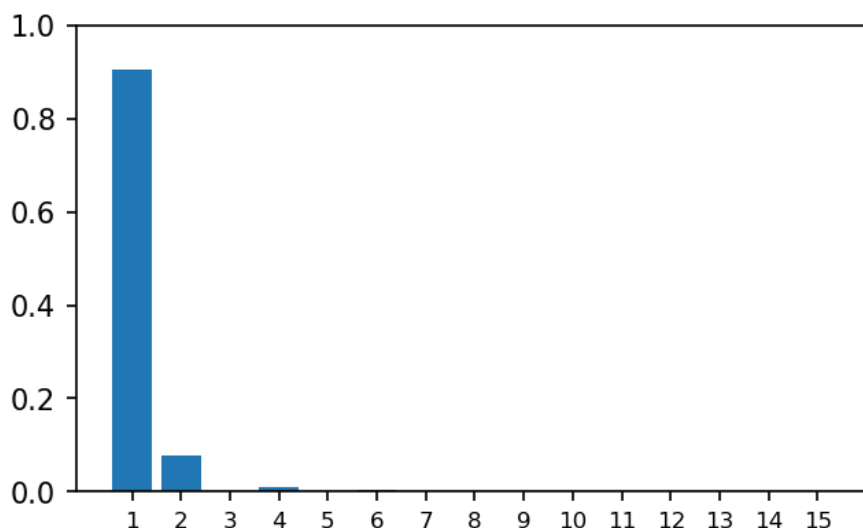
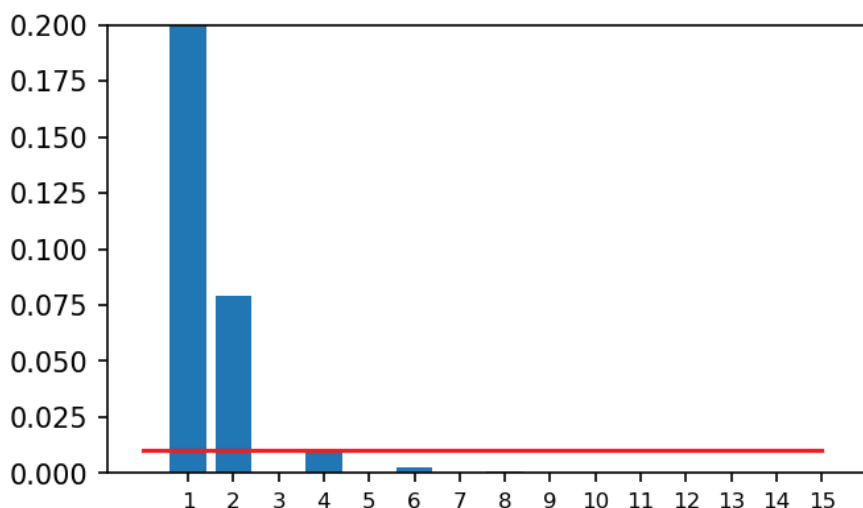


Figura 71 - Carregamento harmônico – Linha de corte do Fator de influência



Em seguida foram analisadas as sequências de enriquecimento dadas pelo indicador de Friberg para as duas primeiras frequências naturais. As sequências indicadas, os indicadores e a soma progressiva desses são apresentadas na Tabela 51 e na Tabela 52.



Tabela 51 - Carregamento harmônico: Sequência de enriquecimento 1ª frequência

Elemento indicado	Indicador	Soma Indicador	Soma normalizada
1	0,164783	0,164783	0,484503
2	0,104282	0,269065	0,791117
3	0,049154	0,318219	0,935642
4	0,017493	0,335713	0,987077
5	0,003936	0,339648	0,998649
6	0,000460	0,340108	1,000000

Tabela 52 - Carregamento harmônico: Sequência de enriquecimento 2ª frequência

Elemento indicado	Indicador	Soma Indicador	Soma normalizada
4	0,116277	0,116277	0,269790
3	0,106319	0,222596	0,516476
1	0,096804	0,319401	0,741085
2	0,052063	0,371464	0,861884
5	0,051753	0,423217	0,981963
6	0,007774	0,430991	1,000000

Para a 1ª frequência os elementos 1 e 2 devem ser enriquecidos para que se obtenha 70% da soma de Friberg. Já para a 2ª frequência é necessário o enriquecimento dos elementos 1, 3 e 4 para obter a mesma porcentagem. Sendo assim, o MEFG RS foi obtido considerando o enriquecimento dos elementos 1, 2, 3 e 4, e a condensação da matriz modal para conter apenas os dois primeiros modos.

Com base nos dados apresentados, os resultados de deslocamento horizontal, velocidade e aceleração para o ponto P (Figura 69) de coordenada (0;20) são apresentados na Figura 72 a Figura 74. Nessas, são apresentadas as respostas obtidas pelo MEFH de referência (Ref.), MEFG, MEFG R e MEFG RS. Destaca-se que os sistemas utilizados nas análises de MEFH, MEFG, MEFG R e MEFG RS contém, respectivamente, 1100, 372, 372 e 260 graus de liberdade totais. Para o método da superposição modal tais análises requerem, respectivamente na mesma sequência, 1080, 360, 2 e 2 modos.

Figura 72 - Carregamento harmônico: Deslocamento

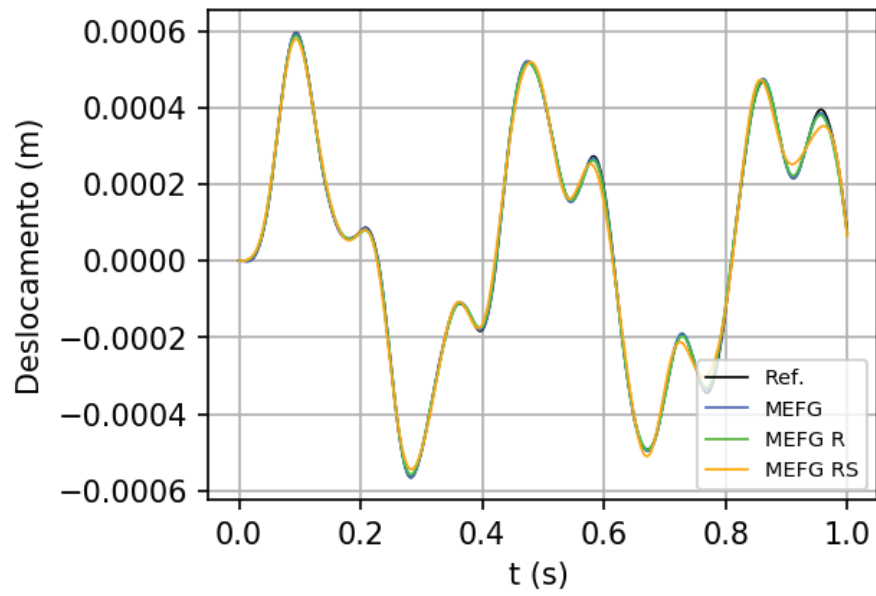


Figura 73 - Carregamento harmônico: Velocidade

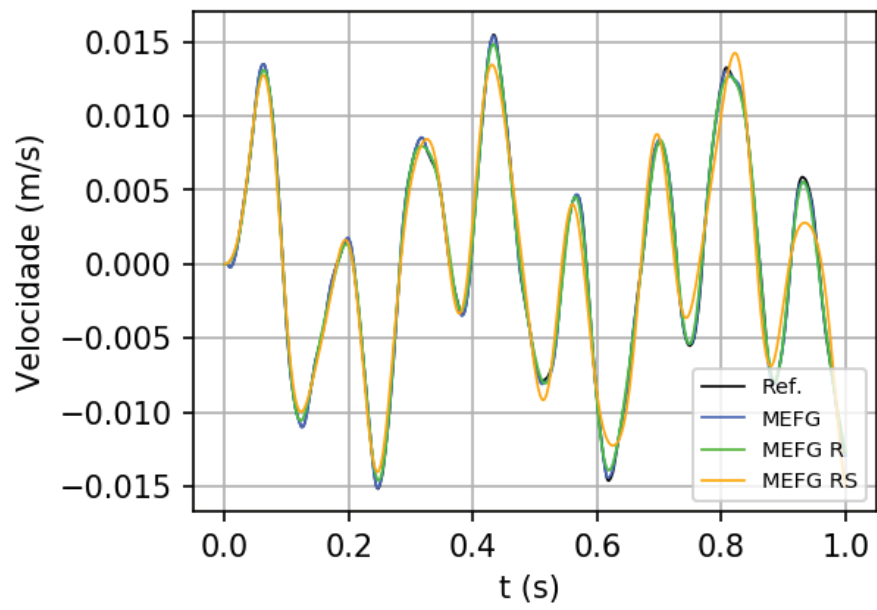
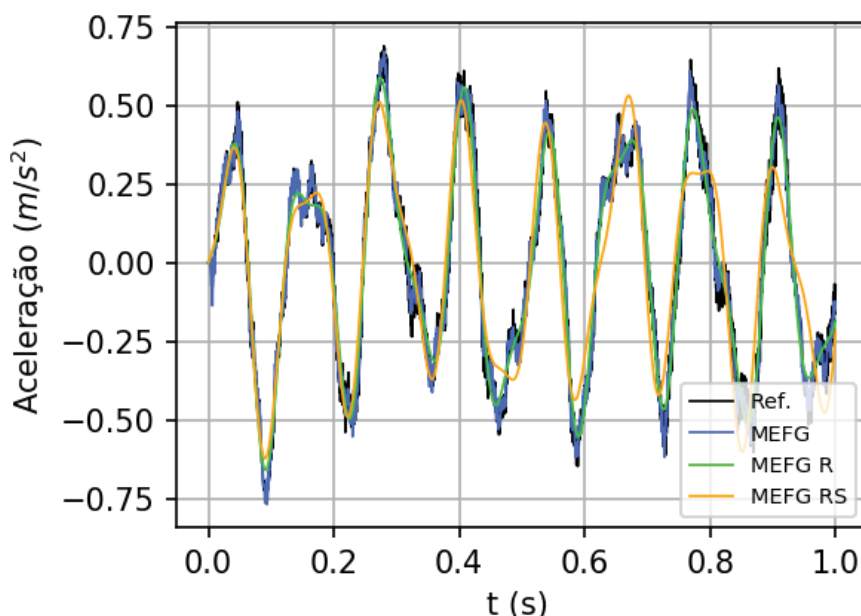


Figura 74 - Carregamento harmônico: Aceleração



As respostas apresentadas indicam que a solução de MEFG, nas três variáveis, aproxima-se muito da solução de referência. A disparidade entre essas é facilmente visível somente na análise de acelerações. Em relação aos deslocamentos e velocidades, o MEFG R levou a resultados quase iguais aos obtidos pelo MEFG. Já o MEFG RS foi o que mais apresentou disparidades. Os erros do MEFG RS são maiores nas porções de picos dos gráficos e aumentam com o tempo de análise. No entanto, destaca-se que todas as curvas tiveram comportamentos próximos.

As maiores disparidades entre curvas são observadas na análise de acelerações. Nessa, o MEFG R apesar de não atingir os picos indicados pelo MEFG, apresenta resultados similares a esse último. Já o MEFG RS, especialmente na segunda metade da análise, levou a picos muito inferiores aos apresentados pelo MEFG R.

Uma observação importante na análise diz respeito a suavidade das curvas obtidas pelo MEFG R e MEFG RS. Debella (2018) analisou problemas de barras e vigas com soluções analíticas, ou em série, conhecidas e verificou que essas apresentam soluções mais suaves do que as obtidas numericamente. Desse modo, essas se aproximavam mais das soluções obtidas considerando a condensação das matrizes.

Como o problema analisado não possui solução analítica conhecida, tal comparação não pode ser realizada. No entanto, pode-se presumir, com base nos resultados apresentados por Debella (2018), que a solução exata não possua o grande nível de perturbações apresentadas pelo MEFH e pelo MEFG. Tais oscilações são geradas, muito provavelmente, por erros maiores nas últimas frequências aproximadas pelos métodos e por aproximações numéricas. Sendo assim, é possível que a solução MEFG R seja a mais próxima da realidade.

Por fim, foram medidos os tempos computacionais necessários para realizar cada uma das análises. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 53. O tempo necessário para analisar o problema através do MEFG R equivale a 66% do tempo exigido pelo MEFG. Já o MEFG RS requer aproximadamente 50% do tempo do MEFG e 75% do tempo do MEFG R.

Desse modo, conclui-se que ambos o MEFG R e o MEFG RS levam a respostas de deslocamento e velocidade muito próximas à do MEFG com tempo computacional reduzido. Quanto à análise de acelerações recomenda-se o uso do MEFG R, uma vez que o tempo computacional exigido por esse, apesar de superior, é muito próximo ao exigido pelo MEFG RS e os resultados apresentaram-se mais precisos.

Tabela 53 - Carregamento harmônico: Tempo computacional

	Análise Modal (s)	Fator de Influência (s)	Análise Transiente (s)	Total (s)
MEFG	5,650	-	23,229	28,879
MEFG R	5,650	0,297	13,013	18,960
MEFG RS	5,487	0,297	8,425	14,209

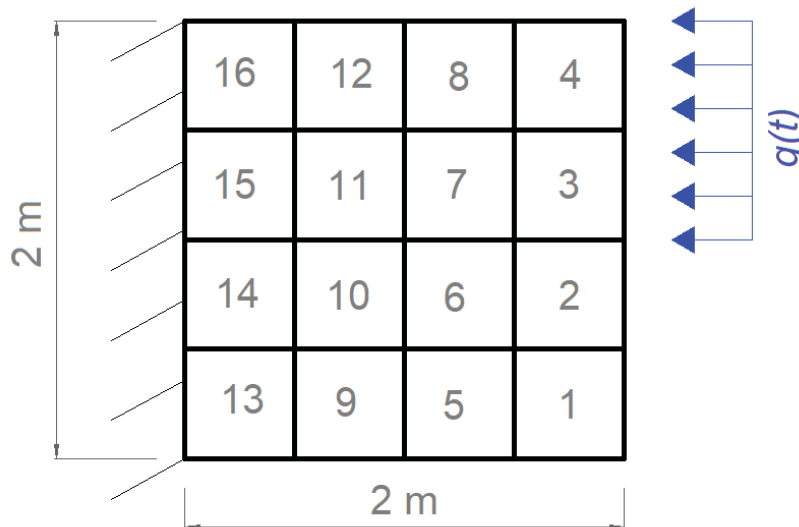
## 9.2 CARREGAMENTO DE IMPACTO

O último exemplo analisado foi o de uma chapa quadrada sujeita a um carregamento de impacto. A chapa possui módulo de elasticidade  $E = 210 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , massa específica  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$  e espessura  $t = 0,01 \text{ m}$ . As demais propriedades da chapa, a malha utilizada e os pontos de aplicação do carregamento são indicadas na Figura 75. O carregamento aplicado é regido por:

$$q(t) = \begin{cases} 10 \text{ N/m}, & \text{se } t \leq t_f \\ 0 \text{ N/m}, & \text{se } t > t_f \end{cases} \quad (133)$$

onde  $t_f$  é o tempo final do impacto e foi adotado como  $2 \times 10^{-4} \text{ s}$ .

Figura 75 - Chapa com carregamento de impacto

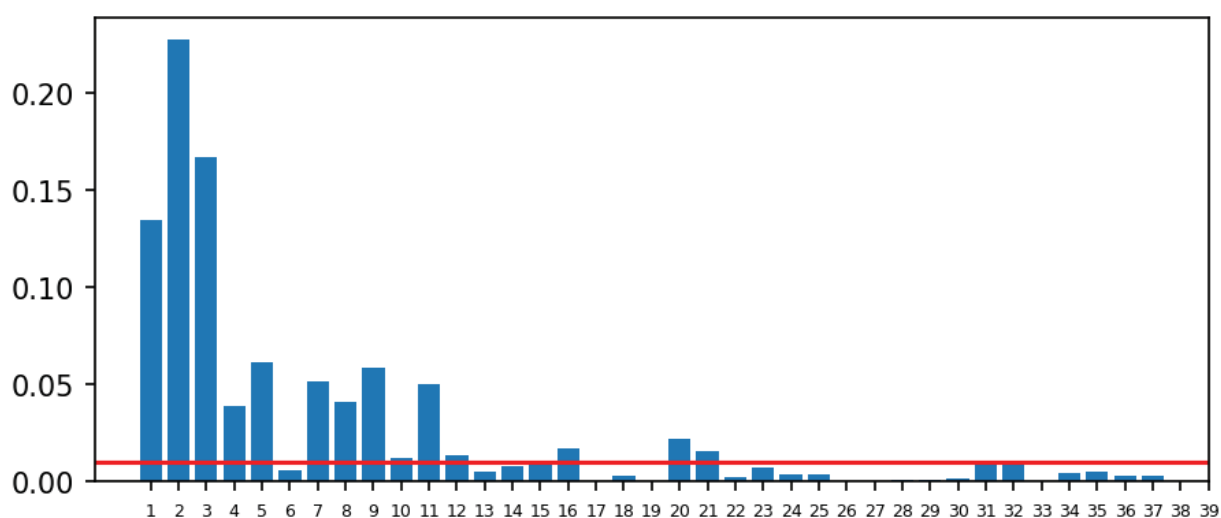


A análise transiente foi realizada pelo método de Newmark aceleração constante com passo de tempo  $\Delta t = 5 \times 10^{-7} \text{ s}$ . Análises de MEFG foram realizadas considerando  $\beta = 2\pi$  para permitir validação com resultados de deslocamento previamente apresentados por Torii (2012). A solução de referência foi obtida através do MEFH com polinômios de Lobatto de grau 9 e a mesma malha da Figura 75.

O primeiro passo realizado foi a obtenção dos fatores de influência dos modos de vibração. Os resultados são indicados na Figura 76. Nessa figura, uma reta

vermelha indica o valor de corte de 0,01. Com base nisso, percebe-se que os modos cuja influência supera 0,01 são o 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 7°, 8°, 9°, 10°, 11°, 12°, 16°, 20° e 21°. Esses, juntos, representam 91,3% da influência modal total. Com base nisso, as respostas do MEFG R foram obtidas considerando apenas o uso desses modos nas matrizes modais. Destaca-se que a análise de MEFG tradicional é feita com 840 modos na matriz modal.

Figura 76 - Carregamento impacto: Fator de influência



O próximo passo na resolução do problema foi a obtenção dos indicadores de Friberg para determinação da sequência ideal de enriquecimento. A Tabela 54 indica a sequência de enriquecimento e a soma de Friberg normalizada obtidas para as três primeiras frequências naturais, que correspondem às frequências com maior fator de influência. Foram destacados na tabela os elementos necessários em cada frequência para que a soma do indicador de Friberg iguale ou supere 70%.

Os resultados da Tabela 54 indicam que caso sejam enriquecidos todos os elementos selecionados nas três primeiras frequências, todos os elementos da malha seriam enriquecidos. Caso sejam consideradas somente a 2ª e 3ª frequências, que possuem maior influência modal, 14 dos 16 elementos da malha precisariam ser enriquecidos. Ambas essas considerações contrariam a principal vantagem de se utilizar o indicador, que é, justamente, possibilitar o enriquecimento de um número reduzido de elementos.

Sendo assim, o MEFG RS foi calculado considerando somente os elementos indicados pela análise da 2ª frequência natural. Essa foi escolhida pois o segundo modo possui fator de influência de 22,75%, o maior dentre os analisados. Nesse caso 8 dos 16 elementos da malha foram enriquecidos. Os resultados de deslocamento horizontal, velocidade e aceleração para o ponto posicionado no centro da chapa obtidos pelo MEFH (Ref.), MEFG, MEFG R e MEFG RS são indicados na Figura 77 a Figura 79.

Tabela 54 - Carregamento impacto: Elementos enriquecidos

Frequência 1		Frequência 2		Frequência 3	
Elemento indicado	Soma normalizada	Elemento indicado	Soma normalizada	Elemento indicado	Soma normalizada
13	0,172741	3	0,112701	9	0,112684
16	0,345483	2	0,225403	12	0,225368
9	0,464393	6	0,309809	10	0,316877
12	0,583304	7	0,394216	11	0,408385
14	0,656654	13	0,477185	13	0,498470
15	0,730005	16	0,560155	16	0,588555
5	0,773770	4	0,638798	5	0,654133
8	0,817534	1	0,717440	8	0,719710
3	0,844634	5	0,777070	7	0,782085
2	0,871733	8	0,836700	6	0,844460
11	0,897103	9	0,882138	13	0,883144
10	0,922472	12	0,927577	15	0,921828
4	0,942963	10	0,958649	4	0,949322
1	0,963454	11	0,989721	1	0,976817
6	0,981727	15	0,994860	3	0,988408
7	1,000000	14	1,000000	2	1,000000

Figura 77 - Carregamento impacto: Deslocamento

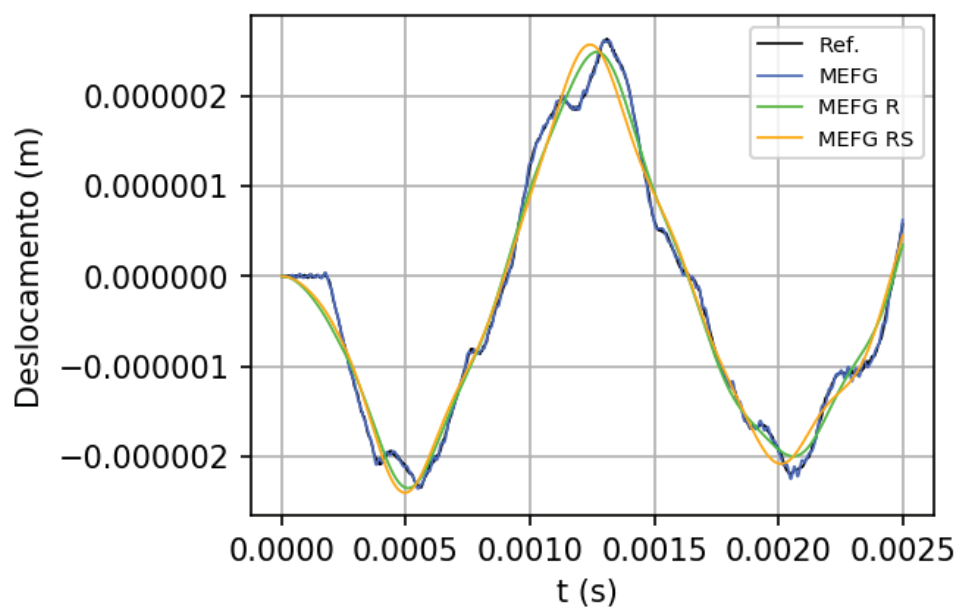


Figura 78 - Carregamento impacto: Velocidade

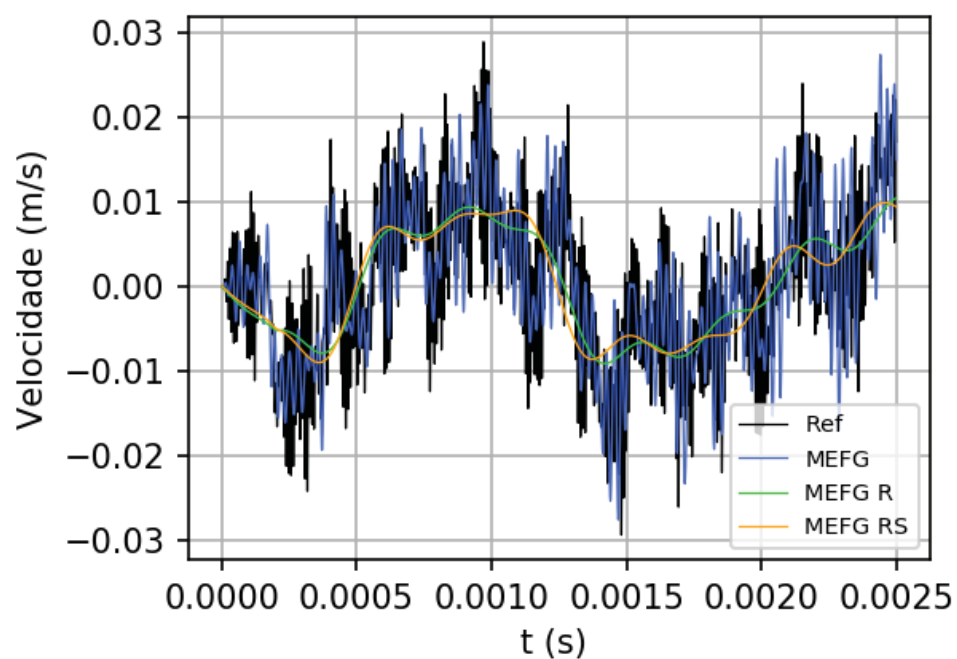
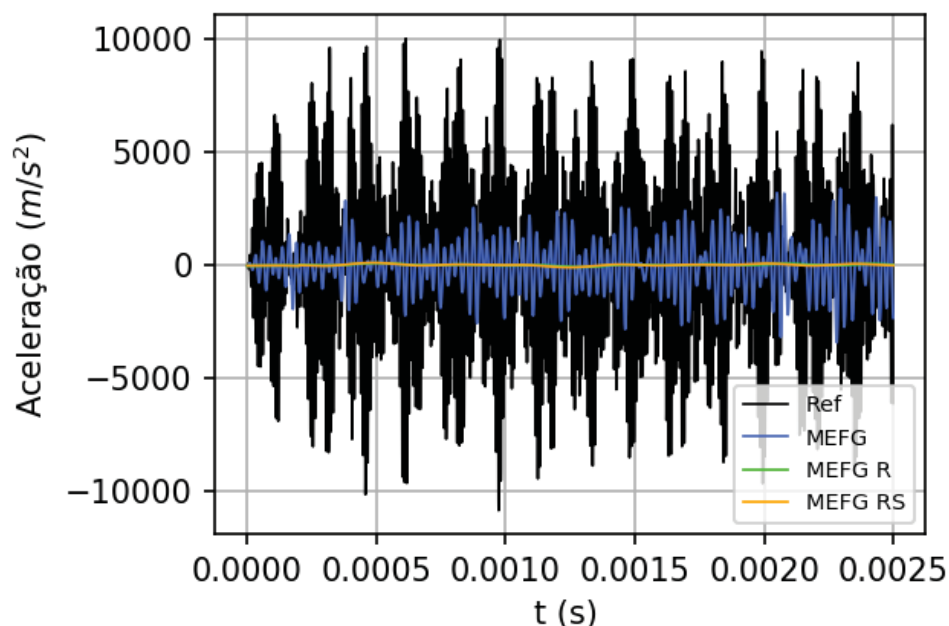




Figura 79 - Carregamento impacto: Aceleração



Na análise de deslocamentos, indicada na Figura 77, os resultados do MEFG (882 g.l.) foram praticamente iguais aos apresentados pelo MEFH (2738 g.l.). As respostas obtidas pelo MEFG R (882 g.l.) e MEFG RS (514 g.l.) são próximas entre si, mas apresentam uma maior discrepância em relação à apresentada pelo MEFG em comparação com às obtidas no item 9.1.

Esse comportamento já era esperado uma vez que além de se estar trabalhando com uma porcentagem de influência modal de 91,3%, inferior a apresentada no item 9.1 de 98,5%, dentro dessa se está enriquecendo elementos condizentes com um único modo cuja influência é de apenas 22,75%. Dadas tais considerações, destaca-se que o comportamento das curvas não apresenta grandes disparidades na análise de deslocamentos.

No entanto, quando são analisadas as curvas de velocidade e aceleração percebe-se uma discrepância clara entre todos os métodos. Tanto o MEFG quanto o MEFH apresentaram altos níveis de perturbação. Entretanto, como previamente mencionado, espera-se que o comportamento da estrutura seja relativamente suave. As perturbações nos métodos podem advir tanto de erros numéricos acumulados, quanto do uso de frequências elevadas, cujos erros são conhecidamente maiores.

Para avaliar tais critérios, foram recalculados os resultados considerando apenas o uso de 50% dos primeiros modos nas análises de MEFG e MEFH (Ref.). Essa porcentagem foi adotada pois representa a faixa na qual, segundo o espectro de frequências, tanto o MEFG quanto o MEFH apresentam modos com boa aproximação (GARCIA, ROSSI e LINZMAIER, 2010; SHANG, MACHADO e ABDALLA FILHO, 2016; WEIHARDT, 2016). Os novos resultados obtidos são indicados na Figura 80 a Figura 82.

A redução das matrizes modais do MEFG e MEFH pouco impacta as curvas de deslocamentos, mas destaca-se que as curvas de tais métodos se tornaram menos oscilatórias em relação às obtidas na Figura 77. As maiores diferenças podem ser observadas nas curvas de velocidade e aceleração. Em ambas, o comportamento se tornou menos oscilatório e as respostas entre os dois métodos se tornaram muito próximas. A maior mudança ocorreu na resposta de aceleração obtida pelo MEFH (Ref.), onde a amplitude das respostas reduziu em torno de  $250 \text{ m/s}^2$ .

Figura 80 - Carregamento impacto: Deslocamento com MEFG e MEFH reduzidos p/ 50%

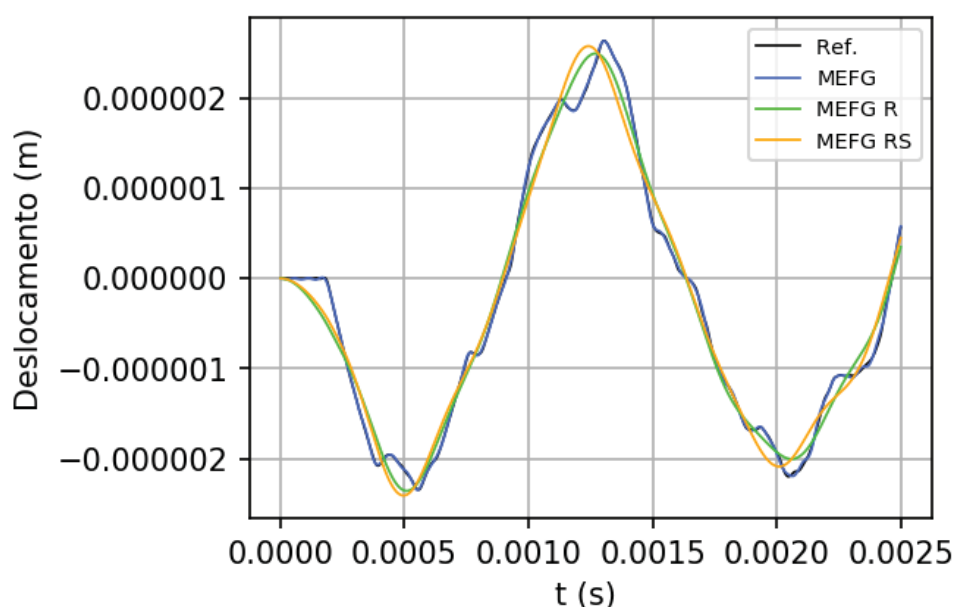


Figura 81 - Carregamento impacto: Velocidade com MEFG e MEFH reduzidos p/ 50%

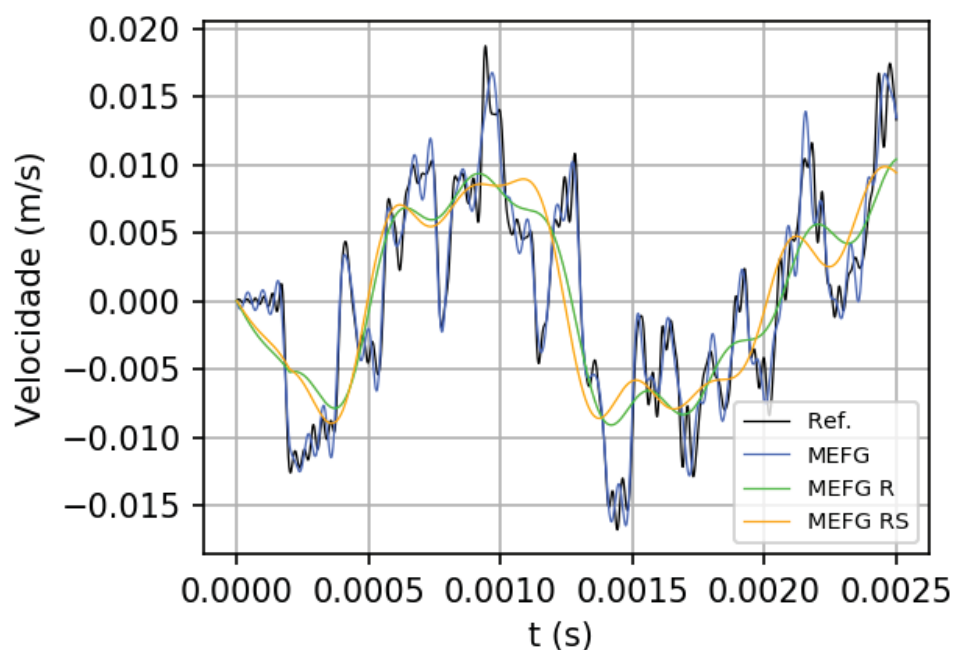
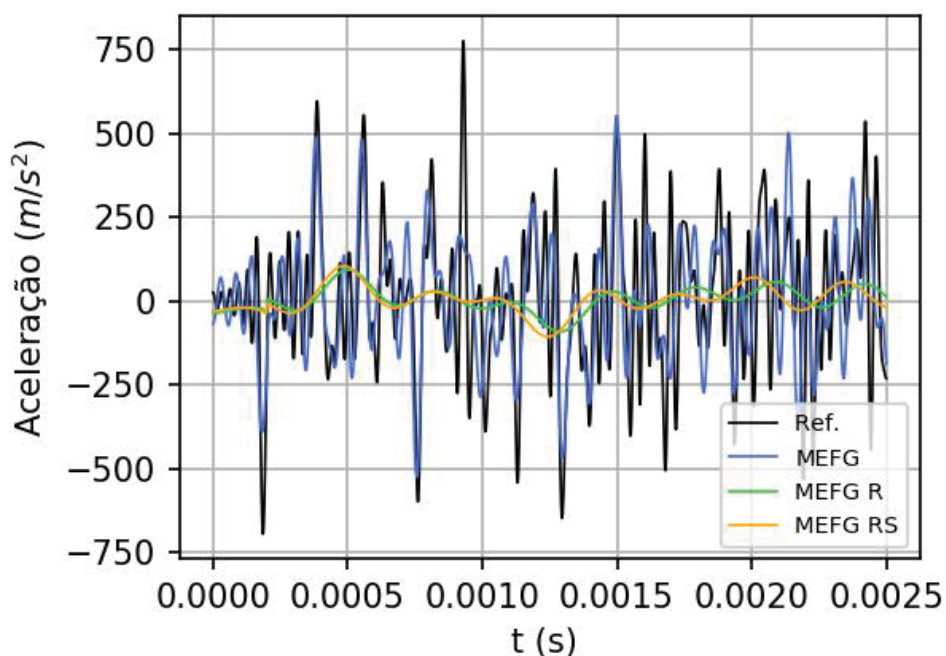


Figura 82 - Carregamento impacto: Aceleração com MEFG e MEFH reduzidos p/ 50%



As respostas indicadas na Figura 80 a Figura 82 facilitam a comparação dos resultados obtidos pelos diferentes métodos, uma vez que as curvas se tornaram mais próximas. A partir desse ponto todas as análises de MEFH e MEFG serão

apresentadas considerando redução da matriz modal a 50%. No entanto, fica evidente uma clara discrepância entre as curvas do MEFG R e MEFG RS com as demais e entre si, especialmente em relação à velocidade e aceleração da estrutura.

A discrepância entre as curvas de MEFG R e MEFG RS diz respeito ao número de elementos enriquecidos e ao problema analisado. Quanto mais elementos forem enriquecidos mais essas se aproximarão. No entanto, destaca-se que as vantagens de tempo computacional, que decorrem de um enriquecimento seletivo, se perdem ao se enriquecer um número alto de elementos.

Sendo assim, recomenda-se que se essa abordagem seja adotada para problemas que possuam poucos modos de vibração com altas taxas de influência modal, ou com um modo específico com influência significativamente superior às demais. Isso porque quanto mais modos impactarem o problema, mais elementos precisarão ser enriquecidos, uma vez que cada frequência natural é afetada por diferentes elementos.

### 9.2.1 INFLUÊNCIA DO TEMPO DE IMPACTO

O problema analisado no item 9.2 possui muitos modos influentes e com baixas taxas de influência. Desse modo, as curvas do MEFG R e MEFG RS pouco se aproximam do MEFG, diferente do comportamento observado no item 9.1. No entanto, destaca-se que isso não indica um comportamento geral de carregamentos de impacto. Isso porque o comportamento da estrutura depende do tempo de aplicação do impacto. Como indicado por Torii (2012), quanto maior o tempo de impacto, maior a influência nos modos mais baixos.

Sendo assim, para comprovar tal efeito e buscar uma aplicação mais significativa para o MEFG RS, o tempo final de impacto  $t_f$  foi modificado para 0,001 segundos. Os novos resultados de fator de impacto são indicados na Figura 83. Percebe-se que houve, de fato, um aumento da influência das primeiras frequências e, conseqüentemente, uma diminuição do impacto de frequências mais elevadas.

Com esses novos dados, os modos cuja influência superam 0,01 passam a ser o 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 7°, 9°, 11°, 20° e 31°. A soma da influência dos modos passa a

ser 91,5%. Ou seja, além de se aumentar a influência dos primeiros modos, a quantidade de modos influentes diminui de 14 para 10, ambas características que favorecem a aplicação do MEFG RS. Os resultados, considerando apenas o uso de tais modos são indicados na Figura 84 a Figura 86. Foi mantido o mesmo enriquecimento seletivo baseado na 2ª frequência natural utilizado no item anterior.

Figura 83 - Carregamento impacto: Fator de influência  $p/t_f = 0,001s$

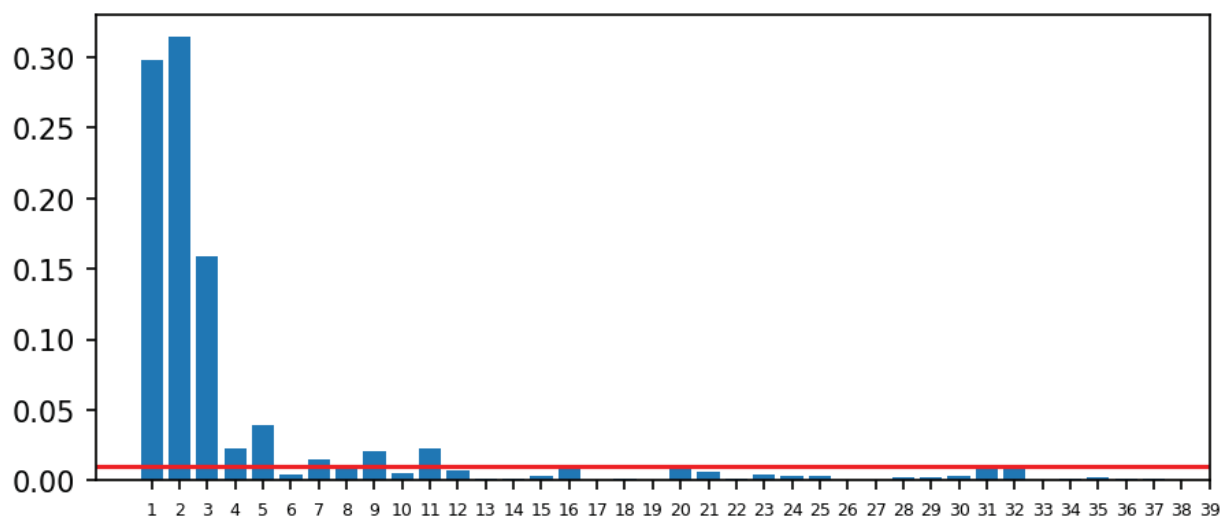


Figura 84 - Carregamento impacto: Deslocamento  $p/t_f = 0,001 s$

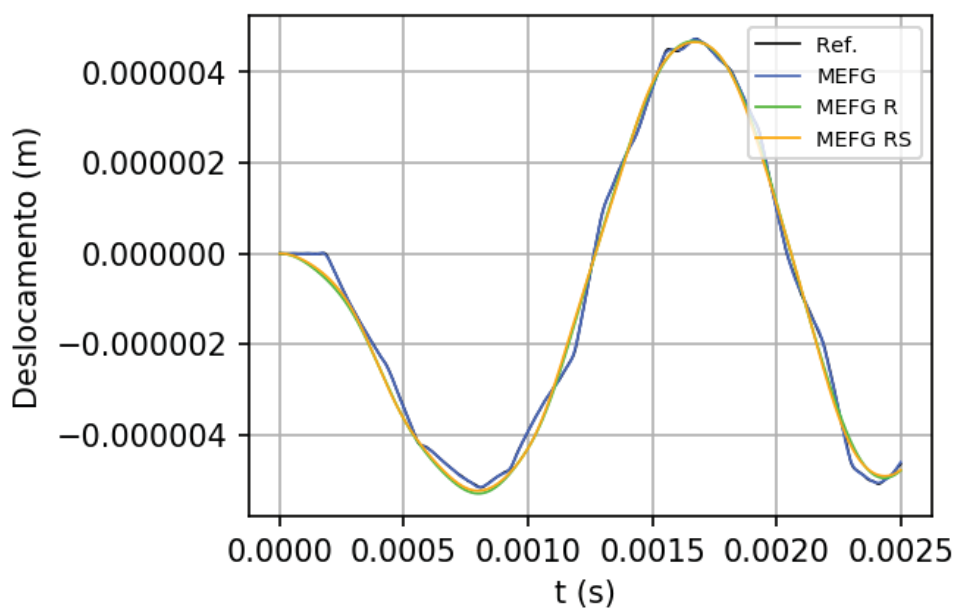
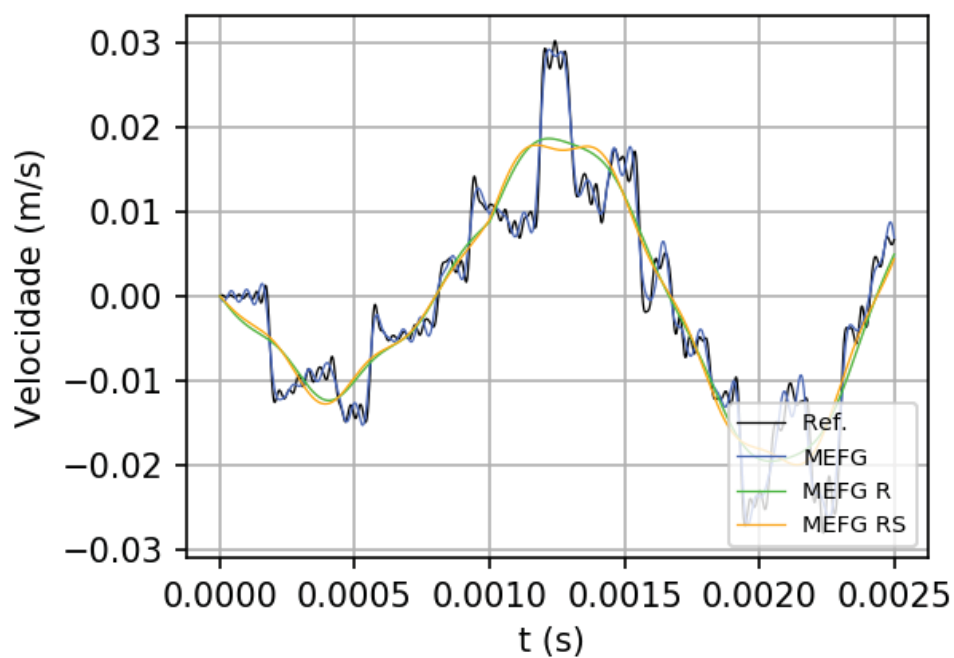
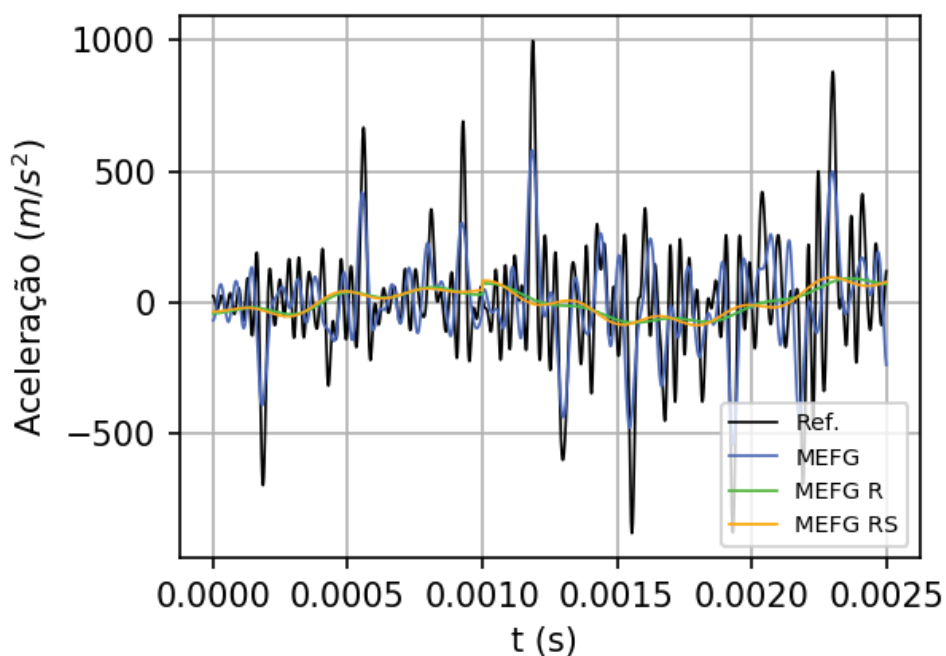


Figura 85 - Carregamento impacto: Velocidade  $p/t_f = 0,001$  sFigura 86 - Carregamento impacto: Aceleração  $p/t_f = 0,001$  s

Os resultados apresentados na Figura 84 a Figura 86 apresentam uma maior aproximação entre as curvas do MEFG R e MEFG RS com as obtidas pelo MEFG e MEFGH, especialmente no que diz respeito a deslocamentos. O comportamento em

relação às velocidades e acelerações, apesar de melhores, ainda apresentam grandes discrepâncias. No entanto, destaca-se que as curvas do MEFG R e MEFG RS tornaram-se muito próximas entre si, indicando a vantagem do enriquecimento seletivo. Resta, então, buscar a aproximação entre os resultados do MEFG R com os resultados de MEFG. Deste ponto em diante o  $t_f = 0,001 \text{ s}$  será mantido nas análises.

### 9.2.2 CRITÉRIO DE SELEÇÃO DOS MODOS INFLUENTES

Um dos aspectos que deve ser analisado é o critério de seleção dos modos influentes. Ao propor o uso de todos os modos cujo fator de influência fosse superior à 0,01, Debella (2018), ao analisar estruturas unidimensionais, trabalhou com influências totais que variavam entre 93,2% e 98,5%. Destaca-se que dentro dessa faixa a maior parte dos exemplos desenvolvidos pela autora tinham fatores de influência total acima de 97%.

De fato, no exemplo 9.1, a soma dos fatores de influência superiores a 0,01 superou 98% e os resultados obtiveram boas aproximações. No entanto, esse comportamento não foi observado no presente exemplo. Nesse, mesmo com a modificação do tempo final de aplicação do impulso no item 9.2.1, a soma do fator de influência dos modos utilizados chegou a somente 91,5%.

Sendo assim, propõe-se usar não um valor de corte para os fatores de influência e sim uma porcentagem total de corte. Ou seja, ao invés de se adotarem todos os modos cujos fatores de influência superam um determinado valor, usar todos os modos cujos fatores de influência, ordenados de modo decrescente, somem uma determinada porcentagem. Para esse exemplo a porcentagem mínima adotada será de 97%.

Para atingir tal porcentagem deve-se trabalhar com 19 modos de vibrar. Os modos utilizados são o 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 7°, 8°, 9°, 10°, 11°, 12°, 16°, 20°, 21°, 23°, 25°, 31° e 32°, que juntos somam 97,2% da influência modal. Os resultados obtidos considerando a condensação da matriz modal para conter apenas esses modos são indicados na Figura 87 a Figura 89.

Figura 87 - Carregamento impacto: Deslocamento com fator de influência &gt; 97%

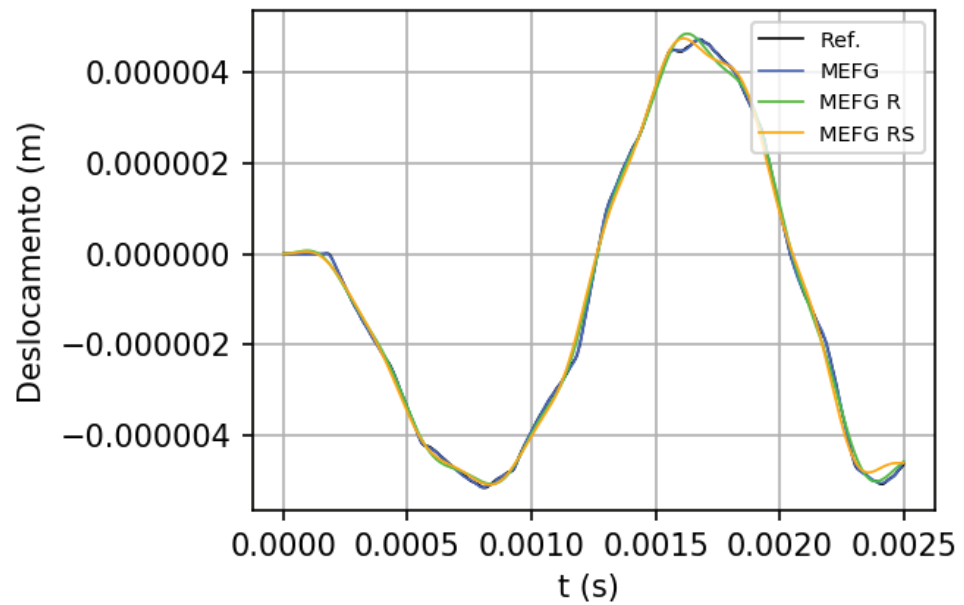


Figura 88 - Carregamento impacto: Velocidade com fator de influência &gt; 97%

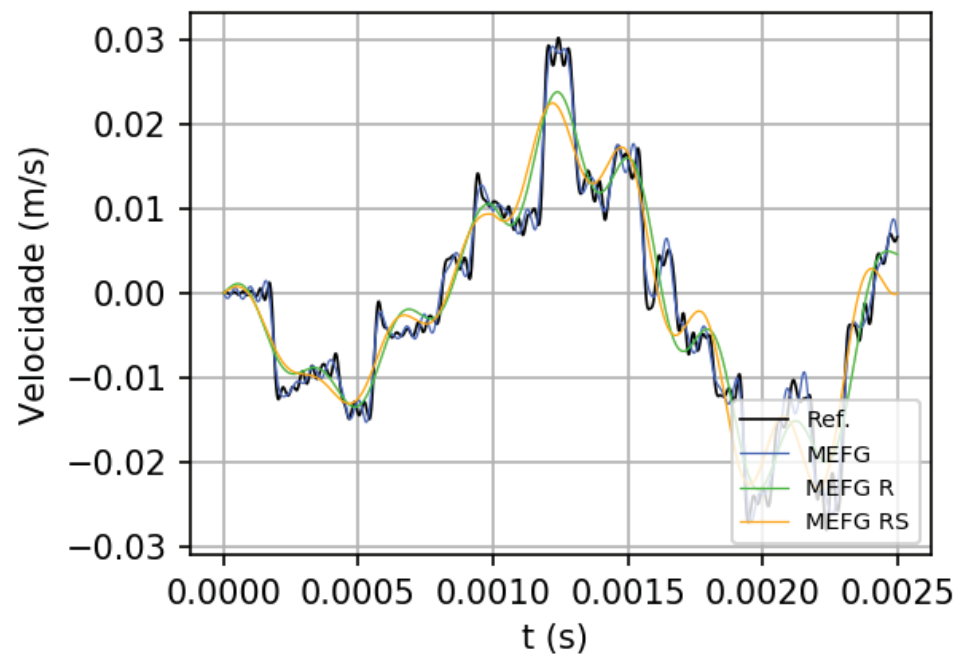
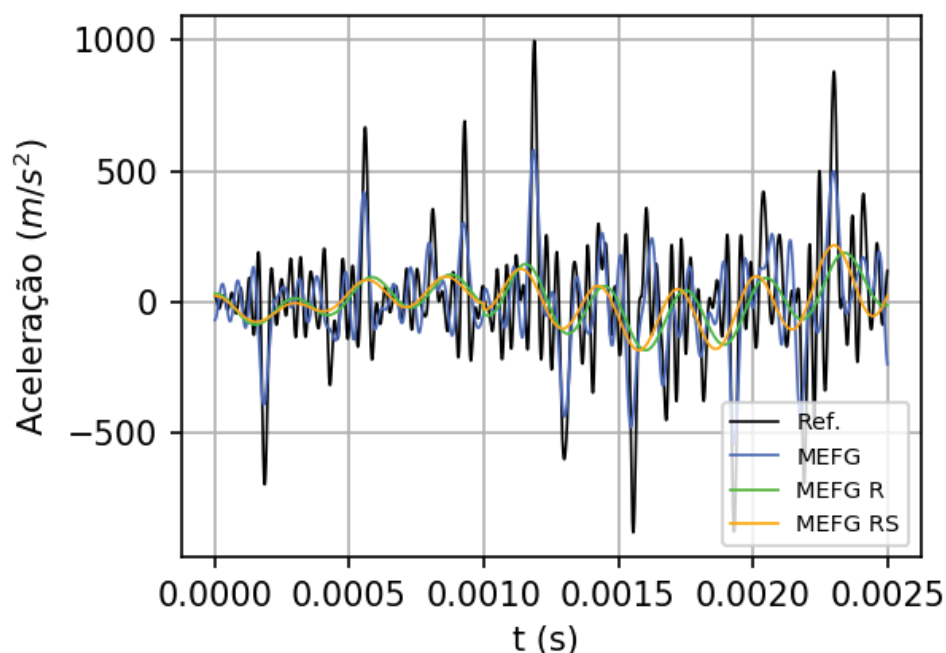




Figura 89 - Carregamento impacto: Aceleração com fator de influência > 97%



Os resultados apresentados na Figura 87 a Figura 89 indicam que houve uma aproximação das curvas do MEFG R e MEFG RS com as obtidas pelo MEFG e MEFGH. Quanto aos deslocamentos, todas as curvas apresentam um comportamento quase igual, e qualquer um dos métodos pode ser utilizado e resultará em erros próximos.

Já no comportamento da velocidade e aceleração, o MEFG R e MEFG RS passaram a melhor identificar as posições dos picos. No entanto a magnitude desses e seu comportamento ainda não igualaram os obtidos pelo MEFG e MEFGH.

Na Tabela 55 são apresentados os tempos computacionais necessários para a análise de MEFG, MEFG com matriz modal reduzida 50%, MEFG R e MEFG RS. Os resultados do MEFG R e MEFG RS foram computados considerando o uso do critério de 97% de influência. O tempo computacional desses últimos equivale a, respectivamente 53% e 33% do tempo exigido pelo MEFG.

Tabela 55 - Carregamento impacto: Tempo computacional

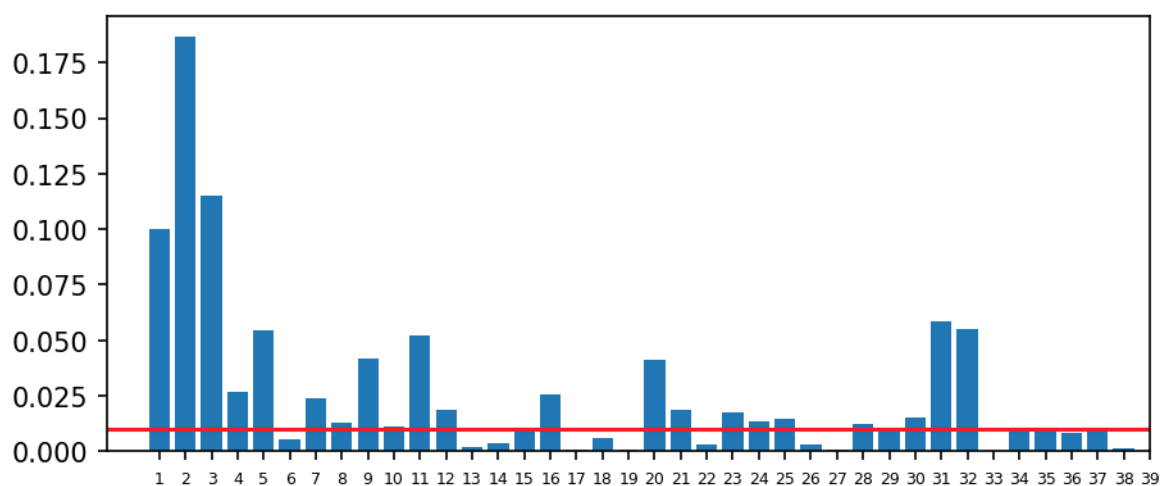
	Análise Modal (s)	Fator de Influência (s)	Análise Transiente (s)	Total (s)
MEFG	18,839	-	286,422	305,261
MEFG 50%	18,839	-	178,113	196,952
MEFG R	18,839	1,068	143,764	163,671
MEFG RS	14,697	1,068	85,007	100,772

### 9.2.3 MODIFICAÇÃO NO CÁLCULO DO FATOR DE INFLUÊNCIA

Com intuito de melhorar os resultados obtidos em relação a velocidades e acelerações propõe-se, então, avaliar a forma como o fator de influência é calculado. Esse como detalhado no item 4.1.2 é baseado nas coordenadas generalizadas de deslocamento. No entanto, o mesmo procedimento de cálculo pode ser utilizado para obter os fatores de influência baseado em coordenadas generalizadas de velocidade e aceleração.

O cálculo dos fatores de influência baseado nas coordenadas generalizadas de velocidade são apresentados na Figura 90. Percebe-se que quanto às velocidades um maior número de modos possui fator de influência superior à 0,01. Além disso a influência dos modos mais preponderantes é inferior àquelas apresentadas pelos deslocamentos (itens 9.2, 9.2.1 e 9.2.2).

Figura 90 - Carregamento de impacto: Fator de influência de velocidades



Sendo assim, seguindo a proposta de manter uma porcentagem de influência superior à 97% foi verificado quais modos devem ser utilizados no problema. Foram utilizados 27 modos que somaram 97,1% da influência modal. Apesar do número elevado em relação aos demais exemplos, esse valor é muito inferior aos 840 modos utilizados no MEFG. Os resultados obtidos com o uso desses modos são indicados na Figura 91 a Figura 93.

Figura 91 - Carregamento impacto: Deslocamentos p/ fator de influência de velocidades

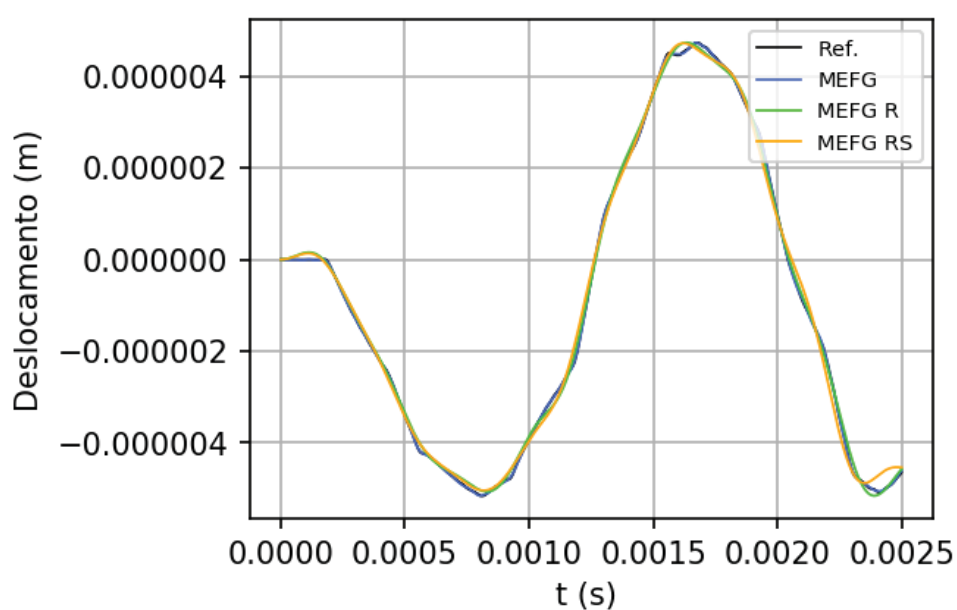


Figura 92 - Carregamento impacto: Velocidade p/ fator de influência de velocidades

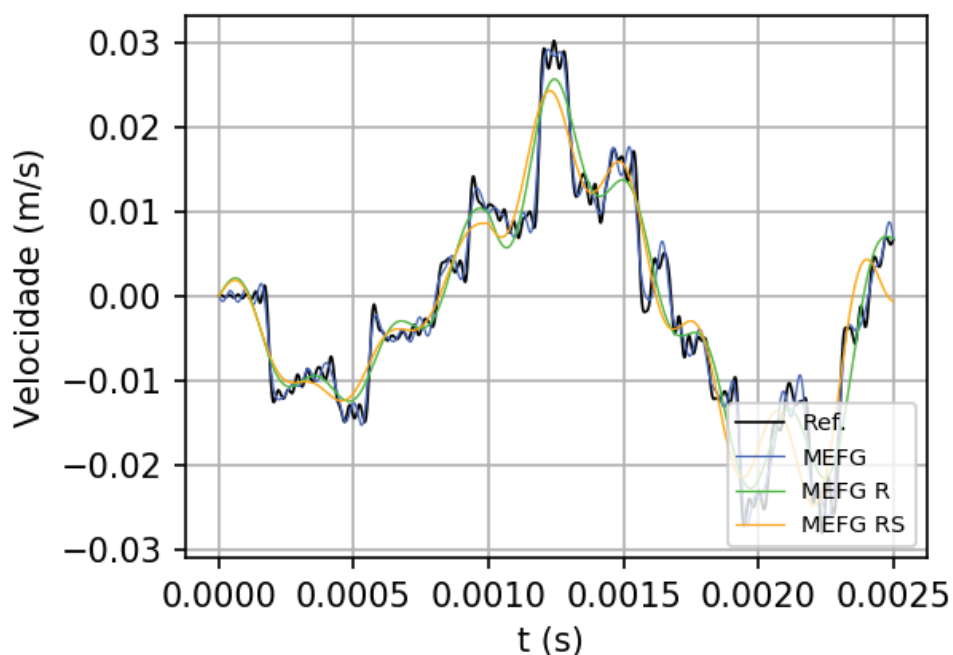
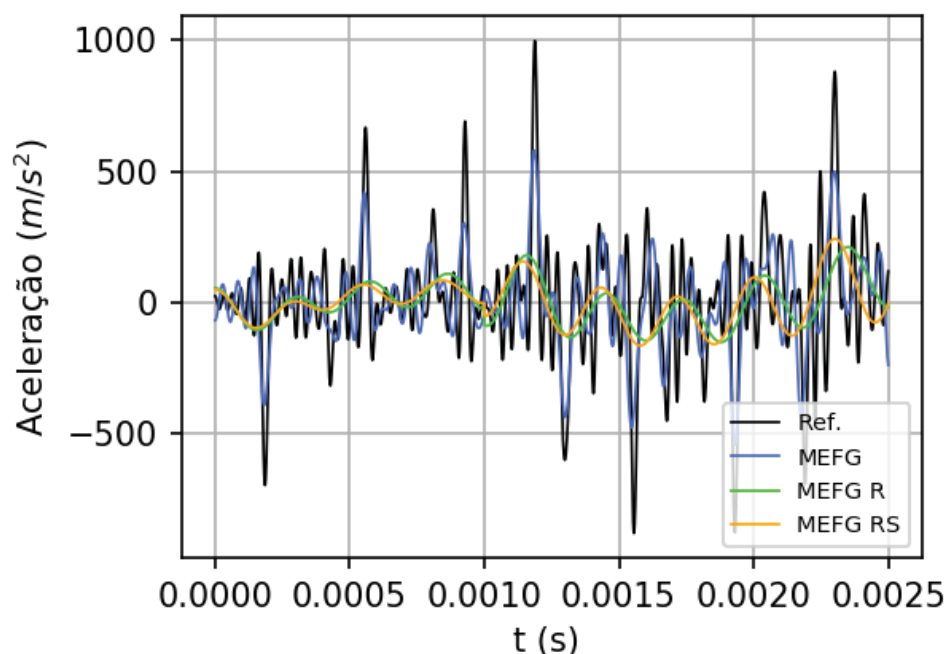


Figura 93 - Carregamento impacto: Aceleração p/ fator de influência de velocidades



Os resultados do uso dos fatores de influência baseados nas coordenadas generalizadas de velocidade quanto aos deslocamentos aproximam ainda mais os resultados de todas as curvas, que se encontram praticamente equivalentes. Na análise de velocidades houve um aumento dos picos obtidos pelo MEFG R e MEFG

RS, que se aproximaram dos obtidos pelo MEFG e MEFH. Quanto à aceleração houve um leve aumento nos picos, mas esses não representaram modificações facilmente identificáveis no comportamento.

Em seguida, foram obtidos os fatores de influência baseados nas coordenadas generalizadas de aceleração. Os resultados desses são indicados na Figura 94. Percebe-se que para as acelerações o impacto de cada modo diminui e que há uma grande influência de modos altos que pouco afetavam a análise de deslocamentos e velocidades.

Com base nesses, são necessários 29 modos para se obter uma porcentagem de influência de 97,2%. Ressalta-se, novamente, que esse valor se mantém muito abaixo dos 840 modos utilizados na análise de MEFG. Os resultados obtidos com o uso de tais modos são indicados na Figura 95 a Figura 97.

Figura 94 - Carregamento impacto: Fator de influência de acelerações

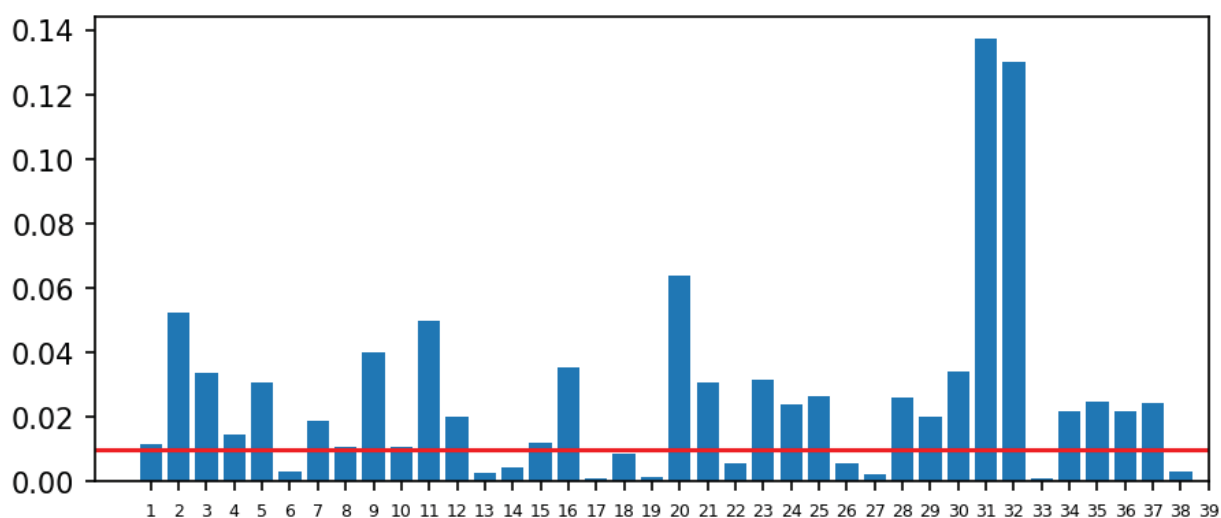


Figura 95 - Carregamento impacto: Deslocamento p/ fator de influência de aceleração

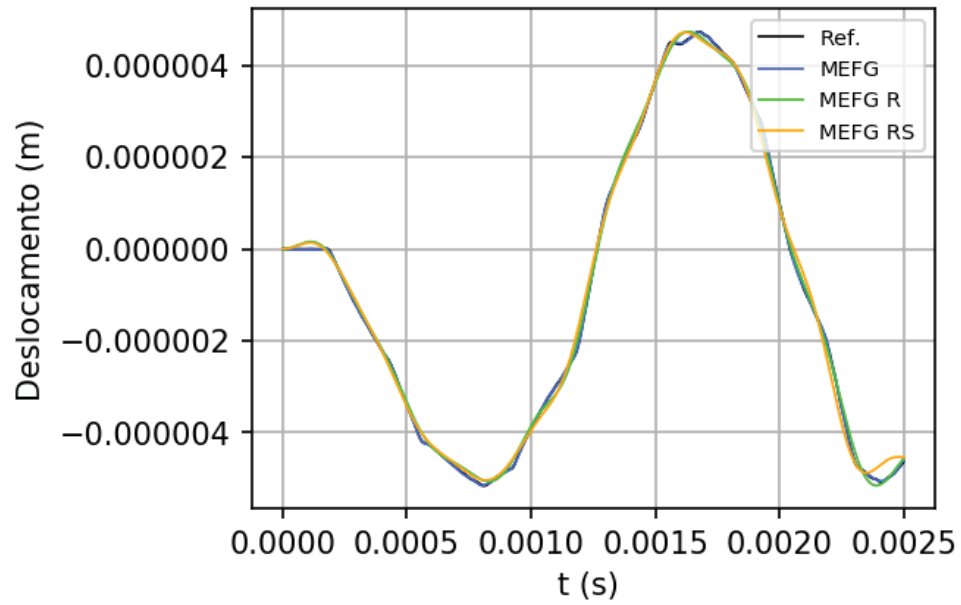


Figura 96 - Carregamento impacto: Velocidade p/ fator de influência de aceleração

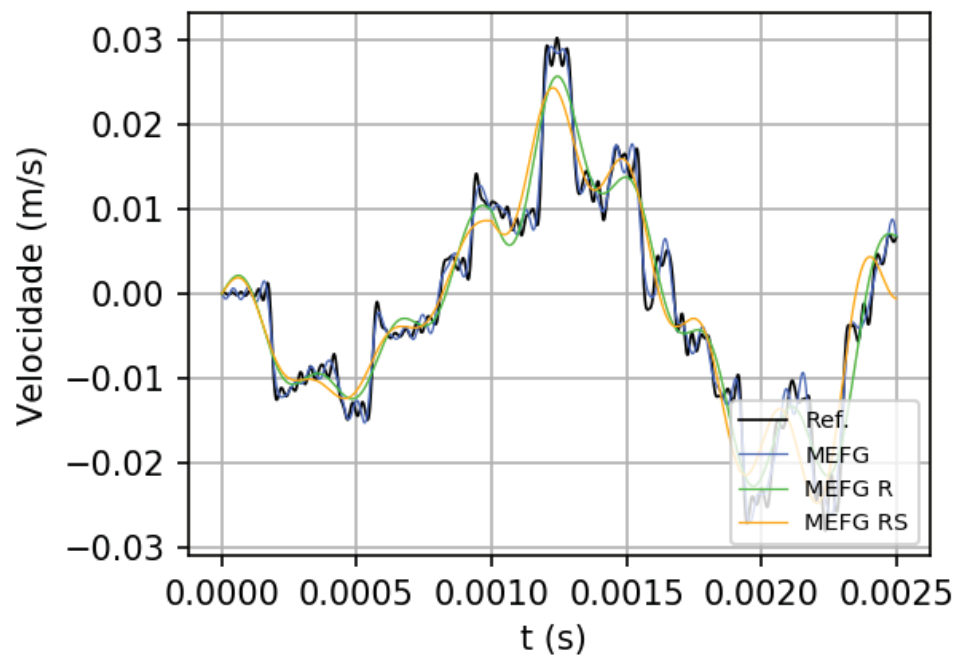
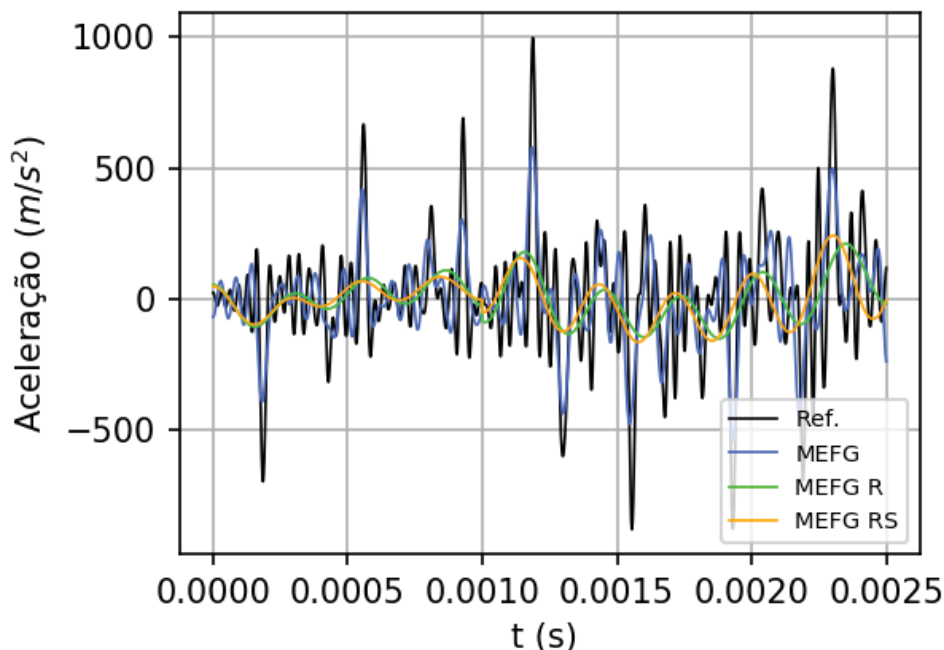


Figura 97 - Carregamento impacto: Aceleração p/ fator de influência de aceleração



Percebe-se que os resultados pouco mudaram em relação aos apresentados quando o fator de influência de velocidades é utilizado. Isso ocorre pois apesar da diferença entre a influência dos modos, os modos preponderantes e utilizados nas análises foram praticamente iguais. Os dois modos presentes na análise de aceleração que não estão presentes na análise de velocidades são o 18° e o 26°, que representam somente 1,4% da influência modal de acelerações.

Para possibilitar uma comparação mais fácil entre os três métodos de cálculo do fator de influência, os modos considerados para se atingir 97% de influência nas três análises são apresentados na Tabela 56. Evidencia-se que todos os modos presentes na análise de deslocamentos estão presentes na de velocidade e todos os presentes nessa última estão presentes na análise de acelerações. A única exceção é o 6° modo que está presente na análise de deslocamentos e não nas demais.

Tabela 56 - Modos utilizados para diferentes coordenadas generalizadas consideradas no fator de influência

Deslocamento	Velocidade	Aceleração
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	7	7
7	8	8
8	9	9
9	10	10
10	11	11
11	12	12
12	15	15
16	16	16
20	20	18
21	21	20
23	23	21
25	24	23
31	25	24
32	28	25
-	29	26
-	30	28
-	31	29
-	32	30
-	34	31
-	35	32
-	36	34
-	37	35
-	-	36
-	-	37

Com base nos dados apresentados pode-se concluir que, apesar da influência dos modos mais altos aumentar à medida que se analisam velocidades e acelerações, grande parte dos modos indicados já são identificados no fator de influência de deslocamentos. Como exemplo podem-se destacar os modos 20, 31 e 32. Esses possuem a maior influência na aceleração e já haviam sido detectados com o fator de influência baseado em coordenadas generalizadas de deslocamento. Sendo assim, não há uma melhoria significativa entre o uso dos diferentes fatores de influência.



Entretanto, destaca-se que o aumento da influência de modos mais elevados nas análises de velocidade e aceleração explicam o aumento da divergência entre o MEFG R e MEFG RS nessas análises. Isso ocorre pois o MEFG RS foi desenvolvido com foco na 2ª frequência natural, que deixa de corresponder ao modo mais importante na análise.

Aplicadas todas as modificações propostas, percebe-se que mesmo com o uso do critério de 97% para escolha dos modos e uso do fator de influência de acelerações, as respostas de velocidade e aceleração obtidas pelo MEFG R ainda apresentam diferenças significativas em relação às análises de MEFG e MEFH. Uma hipótese é que as respostas de MEFG e MEFH obtidas, mesmo com uso de 50% da matriz modal, ainda não representem precisamente o comportamento real da estrutura. Seria necessária uma solução de referência analítica, ou uma análise experimental, para corretamente avaliar essa possibilidade.

No entanto, existe a possibilidade de que as respostas de MEFG obtidas estejam próximas da solução exata. Nesse caso, pode-se afirmar, que quanto menor o número de modos influentes na análise e quanto maior a influência desses, mais próxima a resposta do MEFG R se aproximará da resposta do MEFG. Quanto maior o número de modos influentes segundo o fator de influência, maiores os erros apresentados nas análises de velocidade e aceleração obtidas pelo MEFG R e menor a aplicabilidade do MEFG RS.

## 10 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo principal explorar o enriquecimento seletivo de malha em análises de MEFG com uso do indicador de Friberg. Para cumprir tal objetivo a pesquisa inicialmente avaliou características gerais do indicador. Quanto ao procedimento de cálculo do indicador demonstrou-se que esse pode ser dividido por elemento, direção e função de enriquecimento. O uso conjunto desses três procedimentos permite que o cálculo do indicador seja realizado sem necessidade de se inverter matrizes.

No entanto, a necessidade de se utilizar tais subdivisões de cálculo está ligada com a dimensão dos problemas analisados. Na presente pesquisa, somente a divisão do cálculo por elemento foi realizada e a inversão das matrizes não representou um problema em relação à memória computacional e ao tempo de processamento. Ressalta-se, porém, que para sistemas com números de graus de liberdade superiores aos exemplos avaliados os procedimentos indicados podem se fazer necessários.

Sugere-se que trabalhos futuros avaliem o impacto no tempo computacional gerado pelo uso simultâneo da divisão por elemento, direção e função. Ou seja, uma comparação entre a diminuição de tempo que a não inversão da matriz gera e o acréscimo de tempo ocasionado pelo aumento de iterações de cálculo necessárias.

Além disso, foi avaliado o impacto do tamanho da malha e de elementos distorcidos nas respostas do indicador. Concluiu-se que quanto mais discretizada for a malha e menos elementos distorcidos essa contiver mais altas as frequências nas quais são observados indicadores negativos. Esses últimos, não devem ser considerados em análises, conclusão essa que condiz com resultados previamente indicados por Friberg et al. (1987).

Com base nas características avaliadas através de uma comparação com os resultados de frequências naturais concluiu-se que o indicador de Friberg é capaz de corretamente identificar a melhor sequência de enriquecimento em análises de MEFG. As sequências indicadas pelo indicador e pelas frequências apresentam pequenas inversões quando o erro gerado pelo refino de dois elementos é muito próximo. No entanto, como enriquecimentos seletivos raramente serão aplicados a um único

elemento, tal característica não afeta resultados finais. Além disso, deve-se considerar que pode haver erros de aproximação numérica embutidos nas respostas que levam a tais inversões de sequência.

Na sequência foi realizado o enriquecimento seletivo de diferentes problemas para análise modal. Em todos os exemplos foram avaliados resultados para o MEFG 70% para facilitar a comparação de resultados. Esse condiz ao enriquecimento necessário para que a soma de Friberg iguale ou supere 70% da soma total com enriquecimento de todos os elementos.

Quanto a relação da soma do indicador de Friberg dos elementos enriquecidos com a Capacidade de Aproximação (CA), observou-se que o MEFG 70% leva a uma CA de no mínimo 77% e de em média 85,5%, para os exemplos avaliados no capítulo 8. Tais CAs são obtidas com um número de graus de liberdade totais que variam de 41% a 62% em relação ao número exigido para o enriquecimento de MEFG (enriquecimento de todos os elementos). Ressalta-se que em todas as análises frequências mais altas exigiram um número maior de graus de liberdade no MEFG 70% em relação a frequências mais baixas.

Quanto ao tempo computacional exigido pelo MEFG 70% esse foi sempre inferior ao tempo exigido pelo MEFG tradicional. No exemplo 8.1 (9 elementos), o MEFG 70% exigiu um tempo computacional de em média 95% do tempo exigido pelo MEFG. Já nos exemplos 8.2 e 8.3 que possuem respectivamente 35 e 32 elementos, o MEFG 70% exigiu em média 39% do tempo do MEFG. Com base nisso, recomenda-se que trabalhos futuros verifiquem se uma maior discretização da malha está relacionada com maiores economias nos tempos computacionais em procedimentos seletivos.

Em relação ao número de condição da matriz de massa observou-se que não existe relação clara entre esse e o número de elementos enriquecidos. O número de condição dos problemas analisados variou, na maioria dos casos, de uma ordem inicial de  $10^{11}$  para uma ordem final  $10^{12}$ . Ressalta-se que para os exemplos analisados a solução de MEF possuía número de condição máximo de aproximadamente  $2 \times 10^1$ . Ou seja, o enriquecimento de um único elemento é o que causa maior impacto do número de condição que passa de ordem  $10^1$  a  $10^{11}$  em todos os exemplos do capítulo 8.

Destaca-se que o uso de elementos de transição, apesar de necessários para obtenção da melhor sequência de enriquecimento, faz com que a sequência original de Friberg não seja a que apresenta a melhor CA. Esse conceito é detalhado no item 8.1. Sendo assim, sugere-se para trabalhos futuros que sejam reavaliados os indicadores de Friberg à medida que cada elemento da malha é enriquecido, assim como o efeito no tempo computacional gerado por tal análise. Para evitar tal problema outra sugestão é que sejam avaliados os indicadores por função de enriquecimento e não por elemento.

Por fim foi realizada uma análise de enriquecimentos seletivos para problemas dinâmicos transientes (capítulo 9). Foram propostas soluções considerando a redução das matrizes modais (MEFG R) com uso do Fator de Influência (Debella, 2018) e soluções considerando, além disso, o enriquecimento seletivo da malha com uso do indicador de Friberg (MEFG RS). Quanto à análise de deslocamentos concluiu-se que ambos os procedimentos levam a boas aproximações das respostas de MEFG e MEFH. Destaca-se que os exemplos de MEFG R e MEFG RS levaram a reduções de, respectivamente, em média 40% e 60% do tempo computacional exigido pelo MEFG.

Quanto às análises de velocidades e acelerações observou-se uma maior discrepância entre as respostas de velocidade e aceleração do MEFG R em relação ao MEFG e MEFH. Demonstrou-se que as respostas do MEFG R podem ser melhoradas com a troca do critério de seleção dos modos influentes. O critério original proposto por Debella (2018) de adotar todos os modos cujas influência superem 0,01 foi substituído pelo critério de soma 97% do total. Esse novo critério garante uma porcentagem mínima de influência que não era garantida pelo critério original, uma vez que esse havia sido desenvolvido para problemas unidimensionais.

Além disso, destaca-se que as respostas de MEFG e MEFH apresentadas se aproximaram das respostas de MEFG R quando a matriz modal era reduzida a 50%. Tal porcentagem condiz com a melhor faixa do espectro de frequências (ver detalhes item 9.2). No entanto, visto que para os problemas analisados não se possuíam soluções de referência, mesmo com a redução é possível que as respostas de MEFG e MEFH ainda não representem fielmente o comportamento da estrutura. Uma análise detalhada de soluções de referência é um ponto importante a ser analisado em futuras pesquisas.

No mais, evidenciou-se que as aproximações de velocidade e aceleração do MEFG R e MEFG RS se distanciam uma da outra em relação à análise de deslocamentos. Isso ocorre, como detalhado no item 9.2.3, pois as frequências que mais impactam a velocidade e a aceleração não são as mesmas que impactam os deslocamentos. Sendo assim, sugere-se que trabalhos futuros adotem a frequência que comanda o MEFG RS através de uma análise do Fator de Influência baseada nas coordenadas generalizadas relacionadas à variável de interesse. Tal procedimento levará a melhoria da correlação entre o MEFG R e MEFG RS.

Com base nos resultados apresentados no capítulo 9 conclui-se que o MEFG RS é vantajoso para problemas que possuam poucos modos de vibração influentes. Além disso, é importante que os modos mais influentes, ou de preferência o modo mais influente, possua uma taxa alta de influência, como no exemplo 9.1. Quando muitos modos forem necessários para obter altas taxas do Fator de Influência, como no exemplo 9.2, o MEFG RS não apresenta grandes vantagens de precisão e ganho de tempo computacional em relação ao MEFG R.

Por fim, sugere-se que trabalhos futuros incorporem o enriquecimento seletivo proposto à uma análise de MEFG Adaptativo. O MEFG Adaptativo proposto por Arndt (2009) e utilizado em análises transientes com redução da matriz modal por Debella (2018) e Debella et al. (2019) permite que a precisão de um problema de MEFG seja aumentada sem acréscimo no número de graus de liberdade. No entanto, até o presente momento, tais análises são realizadas com enriquecimento total da malha. A junção de ambos os conceitos levará a um processo Adaptativo Seletivo que poderá obter resultados com maiores precisões do que os apresentados na presente pesquisa com o mesmo, ou menor, número de graus de liberdade.

## REFERÊNCIAS

- ARGYRIS, J.H. Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations. **Aircraft Engineering and Aerospace Technology**, v. 26, n. 10, p.347-356, 1954.
- ARNDT, M. **O Método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise de vibrações livres de estruturas reticuladas**. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.
- ARNDT, M.; MACHADO, R.D.; SCREMIN, A. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, p. 659-672, 2010.
- ARNDT, M.; MACHADO, R.D.; SCREMIN, A. Accurate assessment of natural frequencies for uniform and non-uniform Euler-Bernoulli beams and frames by adaptive generalized finite element method. **Engineering Computations**, v. 33, n. 5, p. 1586-1609, 2016.
- ARREOLA-LUCAS, A.; FRANCO-VILLAFANE, J.A.; BÁEZ, G.; MÉNDEZ-SÁNCHEZ, R.A. In-plane vibrations of a rectangular plate: Plane wave expansion modeling and experiment. **Journal of Sound and Vibration**, v. 342, p. 168-176, 2015.
- BATHE, K. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- BABUSKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J.E. Special Finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 31, n. 4, p. 945-961, 1994.
- BABUSKA, I.; BANERJEE, U. Stable generalized Finite Element Method (SGFEM). **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 201-204, p. 91-111, 2012.
- BEER, F.P.; JOHNSTON JR, E.R. **Resistência dos Materiais**. 3 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1995.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y.Y.; GU, L. Element-free Galerkin methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, p. 229-256, 1994.
- BERCIN, A.N.; LANGLEY, R.S. Application of the dynamic stiffness technique to the in-plane vibrations of plate structures. **Computers & Structures**, v. 59, n. 5, p 869-875, 1996.
- CAMPION, S.D.; JARVIS, J.L. An investigation of the implementation of the p-version finite element method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 23, p. 1-21, 1996.
- CERVELIN, D. **Método dos Elementos Finitos Generalizado: Desenvolvimento e aplicação em análise não-linear utilizando elemento de pórtico espacial de alta**

**ordem.** 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola Politécnica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2014.

CHEN, M.; JIN, G.; YE, T.; ZHANG, Y. An Isogeometric finite element method for the in-plane vibration analysis of orthotropic quadrilateral plates with general boundary restraints. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 133, p. 846-862, 2017.

CHEN, Y.; JIN, G.; LIU, Z. Flexural and in-plane vibration analysis of elastically restrained thin rectangular plate with cutout using Chebyshev-Lagrangian method. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 89, p. 264-278, 2014.

CHEUNG, Y.K.; ZHANG, Y.X.; CHEN, W.J. A refined nonconforming plane quadrilateral element. **Computers and Structures**, v. 78, p. 699-709, 2000.

CHOPRA, A.K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**, 3. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

CLOUGH, R.W.; CHOPRA, A.K. Earthquake stress analysis in earth dams. *Journal of Engineering Mechanics American Society of Civil Engineers*, v. 92, n. 2, p. 197-212, 1966.

CORRÊA, R.M. **Análise dinâmica de arcos utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Dissertação (Mestrado em Engenharia da Construção Civil) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

DABBAGH, V.; SARHAN, A.D.; AKBARI, J.; MARDI, N.A. Design and manufacturing of ultrasonic motor with in-plane and out-of-plane bending vibration modes of rectangular plane with large contact area. **Measurement**, v.109, p. 425-431, 2017.

DEBELLA, L.B.C. **Análise dinâmica transiente pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Dissertação (Mestrado em Engenharia da Construção Civil) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

DEBELLA, L.B.C; CITTADIN, C.C.; ARNDT, M.; MACHADO, R.D. Transient dynamic analysis of bars and trusses by the adaptive generalized finite element method. *Engineering Computations*, ahead-of-print: <https://doi.org/10.1108/EC-10-2018-0451>.

DESAI, C.S.; ABEL, J.F. **Introduction to the finite element method**. Nova York: Van Nostrand Reinhold Company, 1972.

DU, J.; LI, W.L.; JIN, G.; YANG, T.; LIU, Z. An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges. **Journal of Science and Vibration**, v. 306, p 908-927, 2007.

DUARTE, C.A.; ODEN, J.T. An h-p adaptive method using clouds. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 139, p. 237-262, 1996.

DUARTE, C.A; BABUSKA, I. ODEN, J.T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. **Computers and Structures**, v. 77, p. 215-232, 2000.



DUARTE, H.V. **Estimador de Erro para a Formulação p do Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

DYM, C.L.; SHAMES, I.H. **Solid Mechanics: A variational approach**. Augmented Edition. New York: Springer, 2013.

EDGAR, N.B.; SURANA, K.S. On the conditioning number and the selection criteria for p-version approximation functions. **Computers and Structures**, v. 60, n. 4, p. 521-530, 1996.

FARAG, N.H.; PAN, J. Free and forced in-plane vibration of rectangular plates. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 103, p. 408-413, 1998.

FELIPPA, C.A. A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts. **Computers and Structures**, v. 79, p. 1313-1324, 2001.

FRIBERG, P.O. An error indicator for the generalized eigenvalue problem using the hierarchical finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 23, p. 91-98, 1986.

FRIBERG, P.O.; MOLLER, P.; MAKOVICKA, D.; WIBERG, N.E. An adaptive procedure for eigenvalue problems using the hierarchical finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 319-335, 1987.

FRIES, T.; BELYTSCHKO, T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84, p. 253-304, 2010.

GARCIA, O. A.; ROSSI, R.; LINZMAIER, P.R. Método de Elementos Finitos Generalizados com alta regularidade na abordagem de problemas de vibrações livres não amortecidas. **VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**, 2010

GEVINSKI, J.R. **Análise de Tensões Dinâmicas em Superfícies Planas a partir de Parâmetros Modais**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.

GORMAN, D.J. Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with two opposite edged simply supported. **Journal of Sound and Vibration**, v. 294, p. 131-161, 2006.

GUPTA, K.K. Finite dynamic element formulation for a plane triangular element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, p. 1431-1448, 1979.

GUPTA, K.K.; MEEK, J.L. A Brief History of the Beginning of the Finite Element Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, p. 3761-3774, 1996.

HIBBELER, R.C.; **Resistência dos Materiais**. 7 Ed, São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.



HO-NGUYEN-TAN, T.; KIM, H. An interface shell element for coupling non-matching quadrilateral shell meshes. **Computers and Structures**, v. 208, p. 151-173, 2018.

HRENNIKOF, A. The finite element method in application to plane stress. **ASBSE publications**, v. 28, p. 49-67, 1968.

HUGHES, T.J. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1987.

IRONS, B.; BARLOW, J. Comment on Matrices for the Direct Stiffness Method. **AIAA Journal**, v. 2, n. 2, p. 403-404, 1964.

IRONS, B.M. Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods. **AIAA Journal**, v. 4, n. 11, p. 2035-2037, 1966.

JAFARI-TALOOKOLAEI, R.A.; ABEDI, M.; ATTAR, M. In-plane vibration modes of laminated composite beams with arbitrary lay-ups. **Aerospace Science and Technology**, v. 66, p. 366-379, 2017.

KAMAL, S.M.; DIXIT, U.S.; ROY, A.; LIU, Q.; SILBERSCHMIDT, V.V. Comparison of plane-stress, generalized-plane-strain and 3D FEM elastic-plastic analyses of thick-walled cylinders subjected to radial thermal gradient. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 131-132. p. 744-752, 2017.

KERKOFF, M.A.; TOMAZINI, A.A.; JUNGES, E.; ALVES, E.C. Desenvolvimento de software para análise dinâmica e não linear geométrica de pórticos espaciais. **Simpósio de Mecânica Computacional**, Vitória, 2018.

KOWALSKA-KOCZWARA, A.; STYPULA, K. Assessment of the Vibration Influence on Humans in Buildings in the Standards of Different Countries. **Procedia Engineering**, v.161, p 970-974, 2016.

LAI, M.; KREMPL, E.; RUBEN, D. **Introduction to Continuum Mechanics**. 4 Ed, Burlington: Butterworth-Heinemann, 2010.

LANGLEY, R.S.; BERCIN, A. Wave intensity analysis of high frequency vibrations. **Philosophical Transactions of The Royal Society B Biological Sciences**, v. 346, p 489-499, 1994.

LEUNG, A.Y.T.; ZHU, B.; ZHENG, J.; YANG, H. Two-dimensional viscoelastic vibration by analytic Fourier p-elements. **Thin-Walled Structures**, v. 41, p. 1159-1170, 2003.

LEUNG, A.Y.T.; ZHU, B.; ZHENG, J.; YANG, H. Analytic trapezoidal Fourier p-element for vibrating plane problems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 271, p. 67-81, 2004.

LIU, G.R. **Meshfree Methods: moving beyond the Finite Element Method**. 2 ed. Boca Raton, CRC Press, 2010.

LYNN, P.P.; ARYA, S.K. Use of the Least Squares Criterion in the Finite Element Formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 6, p. 75-88, 1973.

LYON, R.H. In-plane contribution to structural noise transmission. **Noise Control Engineering Journal**, v. 26, p. 22-27, 1985.

LYU, P.; DU, J.; LIU, Z.; ZHANG, P. Free in-plane vibration of elastically restrained annular panels made of functionally graded material. **Composite Structures**, v. 178, p. 246-259, 2017.

LYU, P.; DU, J.; WANG, Y.; LIU, Z. Free in-plane vibration analysis of rotating annular panels with elastic boundary restraints. **Journal of Sound and Vibration**, v. 439, p. 434-456, 2018.

MACKERLE, J. Error estimates and adaptive finite element methods: A bibliography (1990-2000). **Engineering Computations**, v. 18, n. 5-6, p. 802-914, 2001.

MALACARNE, M.F. **O indicador de erro de Friberg empregado no método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise dinâmica de estruturas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia da Construção Civil) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

MEIROVITCH, L.; BARUH, H. On the inclusion principle for the hierarchical finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 19, p. 281-291, 1983.

MEIROVITCH, L. **Fundamentals of Vibration**. International Edition, New York: McGraw-Hill, 2001.

MELENK, J.M.; BABUSKA, I. The partition of the unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 139, p. 289-314, 1996.

MELOSH, R.J. Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method. **AIAA Journal**, v. 1, n. 7, p. 1631-1637, 1963.

MUKHERJEE, N.; CHATTOPADHYAY, T. Improved free vibration analysis of stiffened plates by dynamic element method. **Computers and Structures**, v. 52, n. 2, p. 259-264, 1994.

NETO, M.M. **Análise Dinâmica de Chapas Trincadas com Reparos de Material Compósito Utilizando o Método dos Elementos de Contorno**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

NEWMARK, N.M. A method of computation for structural dynamics. **ASCE Journal of Engineering Mechanics Division**, 85, p. 67-94, 1959.

NOORI, A.R.; ASLAN, T.A.; TEMEL, B. An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section. **Composite Structures**, v. 200, p. 701-710, 2018.

NOVOTNY, A.A.; FANCELLO, E.A. Um refinamento h, p e hp adaptativo na análise de flexão de placas semi-espessas. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 14, n. 1, p. 25-48, 1998.

ODEN, J.T.; DUARTE, C.A.M.; ZIENKIEWICZ, O.C. A new cloud-based hp finite element method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**. v. 153, p. 117-126, 1998.

OLIVEIRA, E.R.A. Theoretical foundations of the finite element method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 4, n.10, p. 929-952, 1968.

OLIVEIRA, W.C. **Um Elemento Finito Hierárquico para Análise Dinâmica p-Adaptativa de Placas Espessas**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

OVUNC, B.A. In-plane vibration of plates under external disturbances applied at singular points. **Thin-Walled Structures**, v. 18, p 83-95, 1994.

PEANO, A. Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 2, n. 3-4, p. 211-224, 1976.

PETROLI, T. **Condicionamento do problema de autovalores obtido do método de elementos finitos generalizados na dinâmica de estruturas**. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setor de tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016

PETRUSKA, G. Finite element convergence on a fixed grid. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 4, p. 67-71, 1978.

PIEDEDE NETO, D.; PROENÇA, S.P.B. Generalized Finite Element Method in linear and nonlinear structural dynamic analyses. **Engineering Computations**, v. 33, ed. 3, p. 806-830, 2016.

PRAGER, W. A note on the optimal choice of finite element grids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 6, p. 363-366, 1975.

RAMOS, C.S. **Partição da Unidade flat-top e trigonométricas no Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

RAO, S. **Vibrações Mecânicas**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

RAUEN, M. **Análise isogeométrica aplicada aos problemas de vibração livre na mecânica das estruturas**. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

REDDY, J.N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3 ed. Nova York: McGraw-Hill, 2006.

REDDY, J.N.; **An introduction to Continuum Mechanics**. Cambridge University Press, 2008.

SHANG, H.Y.; MACHADO, R.D.; ABDALLA FILHO J.E. Dynamic analysis of Euler-Bernoulli beam problems using the Generalized Finite Element Method.

**International Journal of Computers and Structures**, v. 173, p. 109-122, 2016.

SHANG, H.S.; MACHADO, R.D.; ABDALLA FILHO J.E.; ARNDT, M. Numerical analysis of plane stress free vibration in severely distorted mesh by Generalized Finite Element Method. **European Journal of Mechanics/ A Solids**, v. 62, p. 50-66, 2017.

SHANG, H.Y.; MACHADO, R.D.; ABDALLA FILHO, J.E. On the performance of GFEM with trigonometric enrichment in bidimensional dynamic elastoplastic modelling. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v. 73, p. 512-527, 2019.

SOLIN, P.; SEGETH, K; DOLEZEL, I. **Higher-Order Finite Element Methods**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004.

SOLIN, P.; ANDRS, D.; CERVENY, J.; SIMKO, M. PDE-independent adaptive hp-FEM based on hierarchic extension of finite element spaces. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 233, p. 3086-3094, 2010.

SONG, C.; OOI, E.T.; PRAMOD, A.L.N.; NATARAJAN, S. A novel error indicator and an adaptive refinement technique using the scaled boundary finite element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 94, p. 10-24, 2018.

SORIANO, H.L. **Método de elementos finitos em análise de estruturas**. São Paulo: EDUSP, 2003.

SORIANO, H.L. **Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 181, p. 43-69, 2000.

SZABO, B.A.; LEE, G.C. Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 1, p. 301-310, 1969.

SZABO, B.A.; MEHTA, A.K. p-Convergent finite element approximations in fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12, p. 551-560, 1978.

SZABO, B.A; BABUSKA, I. **Finite Element Analysis**. Nova York: John Wiley & Sons Inc., 1991.

TORII, A.J. **Análise dinâmica de estruturas com o método dos elementos finitos generalizado**. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

TORII, A.J.; MACHADO, R.D. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 9, n. 3 p. 1-31, 2012.

TORRES, D.A.F. **Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Placas Laminadas Compostas Inteligentes**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

TURCKE, D.J.; MCNEICE, G.M. Guidelines for selecting finite element grids based on an optimization study. **Computers and Structures**, v. 4, p. 409-519, 1974.

TURNER, M.J.; CLOUGH, R.W.; MARTIN, H.C.; TOPP, L.J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805-824, 1956.

VAZ, L.E. **Método dos Elementos Finitos em análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda, 2011.

VU-HOANG, T.; VO-MINH, T.; NGUYEN-XUAN, H. Bubble-enhanced quadrilateral finite element formulation for nonlinear analysis of geotechnical problems. **Underground Space**, v. 3, n. 3, p. 229-242, 2018.

WANG, G.; WERELEY, N.M. Free in-plane vibration of rectangular plates. **AIAA Journal**, v. 40, n. 5, p. 953-959, 2002.

WANG, Q.; SHI, D.; LIANG, Q.; FAZL e AHAD, A unified solution for free in-plane vibration of orthotropic circular, annular and sector plates with general boundary conditions. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, n. 21-11, p. 9228-9253, 2016.

WEINHARDT, P.O. **Estudo da estabilidade do método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado à análise dinâmica**. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

WILLIAMSON JR., F. Richard Courant and the Finite Element Method: A Further Look. **Historia Mathematica**, v. 7, p. 369-378, 1980.

XING, Y.F.; LIU, B. Exact solutions for the in-plane vibrations of rectangular plates. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 51, p 246-255, 2009.

ZHAO, C.; STEVEN, G.P. Asymptotic Solutions for Predicted Natural Frequencies of Two-Dimensional Elastic Solid Vibration Problems in Finite Element Analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, p. 2821-2835, 1996.

ZHOU, Y.; WANG, Q.; SHI, D.; LIANG, Q. Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates with arbitrary boundary conditions. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 130, p. 1-10, 2017.

ZIENKIEWICZ, O.C. The Generalized Finite Element Method – State of the Art and Future Directions. **Journal of Applied Mechanics**, v. 50, n. 10, p 1210-1217, 1983.

ZIENKIEWICZ, O.C; TAYLOR, R.L.; ZHU, J.Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. 6. ed. Exford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method**. 5. ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2000.